主題三 可化成變數可分離型

1. 有些微分方程乍看之下並非變數可分離型，但只要經過適當的打包，就可以化成變數可分離型。

2. **常見的可化成變數可分離型的各型：**

(1) $y'=f(\frac{y}{x})$ 型：(齊次)

$\boxed{\text{解法}}$ 令 $u=\frac{y}{x}$ 將 y 代換掉，解 u 再代回

(2) $y'=f(ax+by)$ 型：

$\boxed{\text{解法}}$ 令 $u=ax+by$ 將 y 代換掉，解 u 再代回

(3) $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ 型：

$\boxed{\text{解法}}$

① 若 $(a_1,b_1)//(a_2,b_2)$，則為 $y'=f(ax+by)$ 型

② 若 $(a_1,b_1)\not\parallel(a_2,b_2)$，則：

1° 解 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 得交點 (h,k)

2° 令 $\begin{cases}u=x-h\\v=y-k\end{cases}$ 代回原式，則原式化為齊次型

3° 用齊次型解法解之

例題 1

Solve $y'=\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2$.

〈解〉

1° 令 $u=\frac{y}{x}$，則 $y=ux$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

2° 原式 $\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=u+u^2\Rightarrow\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{x}dx\Rightarrow-\frac{1}{u}=\ln|x|+C$

$\Rightarrow-\frac{x}{y}=\ln|x|+C$ ■

◎ 令 u 的過程中，我們通常是把 y 換掉，也就是原本是 x 和 y 的式子變成 x 和

u 的式子。

類題 1

Solve $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

〈答〉 $\tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) = \ln|x| + C$

例題 2

Solve $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

〈解〉

1° 原式$\Rightarrow (x^2 + y^2)dx = xydy \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}(x^2 + y^2)dx = \dfrac{1}{x^2}xydy \Rightarrow (1 + (\dfrac{y}{x})^2)dx = \dfrac{y}{x}dy$

2° 令 $u = \dfrac{y}{x}$，則 $y = ux$

$\Rightarrow dy = udx + xdu$

3° 原式$\Rightarrow (1 + u^2)dx = u(udx + xdu) \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = udu \Rightarrow \ln|x| = \dfrac{u^2}{2} + C$

$\Rightarrow \ln|x| = \dfrac{y^2}{2x^2} + C$ ■

◎ 相較於從 $y = ux$ 推得 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，實作上更常使用 $dy = udx + xdu$ 這個推論。要獲得 $dy = udx + xdu$，只要將 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ 兩邊同時乘上 dx 即可。

類題 2

Solve $(y^3 + xy^2 + x^2y)dx - x^3dy = 0$.

〈答〉 $\ln|x| = \ln\left|1 + \dfrac{x}{y}\right| - \dfrac{x}{y} + C$

例題 3

Solve $y' = 2x + y$.

〈解〉

1° 令 $u = 2x + y$，則 $du = 2dx + dy$

2° 原式$\Rightarrow dy = (2x + y)dx \Rightarrow du - 2dx = udx \Rightarrow \dfrac{1}{u+2}du = dx \Rightarrow \ln|u + 2| = x + C$

$\Rightarrow \ln|2x + y + 2| = x + C$ ■

類題 3

Solve $y' = ax + by$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

〈答〉 $\ln\left|ax + by + \dfrac{a}{b}\right| = bx + C$

例題 4

Solve $(2x + y + 1)dx + (4x + 2y + 3)dy = 0$.

〈解〉

1° 令 $u = 2x + y$， 則 $du = 2dx + dy$

2° 原式$\Rightarrow (u+1)dx + (2u+3)(du - 2dx) = 0 \Rightarrow \dfrac{2u+3}{3u+5}du = dx$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u - \frac{1}{9}\ln|3u+5| = x + C \Rightarrow \frac{2}{3}(2x+y) - \frac{1}{9}\ln|3(2x+y)+5| = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{9}\ln|6x+3y+5| = C \quad \blacksquare$$

類題 4

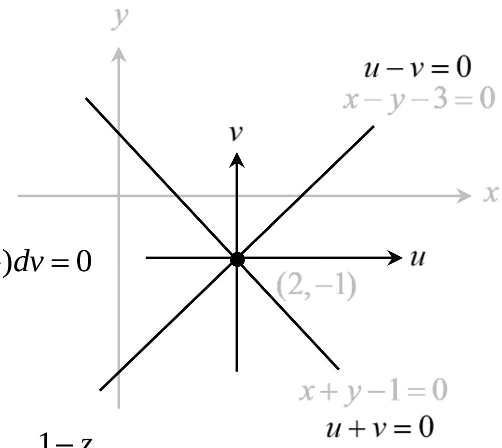
Solve $(x + 3y + 1)dx = (2x + 6y - 3)dy$.

〈答〉 $-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{6}{5}y - \dfrac{3}{5}\ln|x + 3y| = C$

例題 5

Solve $(x + y - 1)dx + (x - y - 3)dy = 0$.

〈解〉



1° 解 $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (2, -1)$

2° 令 $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y + 1 \end{cases}$， 則 $\begin{cases} du = dx \\ dv = dy \end{cases}$

3° 原式$\Rightarrow (u+v)du + (u-v)dv = 0 \Rightarrow (1 + \dfrac{v}{u})du + (1 - \dfrac{v}{u})dv = 0$

4° 令 $z = \dfrac{v}{u}$， 則 $v = zu$

$\Rightarrow dv = zdu + udz$

5° 原式$\Rightarrow (1+z)du + (1-z)(zdu + udz) = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{u}du = \dfrac{1-z}{1+2z-z^2}dz$

$$\Rightarrow -\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2z - z^2\right| + C$$

$$\Rightarrow -\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2\left(\frac{y+1}{x-2}\right) - \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right| + C \quad \blacksquare$$

◎ 例題 5 的手法是為了將常數消掉。若能將常數消掉，原式就會變成齊次型。要消掉 -1 跟 3 這兩個常數，我們將 $x+y-1=0$ 和 $x-y-3=0$ 這兩條直線進行平移，只要這兩條直線的交點平移到原點，則平移後的二直線就不會有常數項了。此外，平移的過程部會使 dx 和 dy 變複雜，故此手法是解此類微分方程的好方法。

類題 5

Solve $(x-2y-4)dx+(2x-y-5)dy=0$.

〈答〉 $-\ln|x-2| = 2\ln\left|\dfrac{1+(\frac{y+1}{x-2})}{\sqrt{1-(\frac{y+1}{x-2})^2}}\right| + \dfrac{1}{2}\ln\left|1-(\dfrac{y+1}{x-2})^2\right| + C$

◉ 很多失敗不是因為能力有限，而是沒有堅持到底。

感謝你使用我的講義，若要跟課，歡迎到我的**課程平台：張旭無限教室 / 张旭无限教室**

(1) 台版：https://www.changhsumath.com

(2) 陸版：https://appvmkwfqc35610.h5.xiaoeknow.com

客服管道：

(1) LINE@：https://lin.ee/HxocMCt (張旭無限教室，ID：changhsumath)

(2) 微信公眾號：张旭老师和他的伙伴们，ID：changhsumathOfficial，或掃下面二維碼：

官方社群平台：

(1) YouTube：

① 數學老師張旭：https://www.youtube.com/@changhsumath

② 張旭無限教室：https://www.youtube.com/@changhsumath666

(2) Facebook：https://www.facebook.com/changhsumath.official

(3) Instagram：https://www.instagram.com/changhsumath

(4) Bilibili：

① 数学老师张旭：https://space.bilibili.com/3493260571969923

② 张旭无限教室：https://space.bilibili.com/521685904

(5) 抖音：

https://www.douyin.com/user/MS4wLjABAAAAZtrTUEM6BErrggMYTdj_1MoGJ3HpdbTz0Vy7o4AZC7hh6RA75ye9DzIpAw9z1otQ (ID：changhsumath)

如果覺得我的課程不錯，請多多幫我按讚、留言和分享，謝謝！