YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

講義實體書販售中

張旭微積分下學期課程販售中

詳情請關注張旭老師各社群平台

或直接私訊張旭老師取得商店連結

第一章 極限

- 今天的我，沒有極限

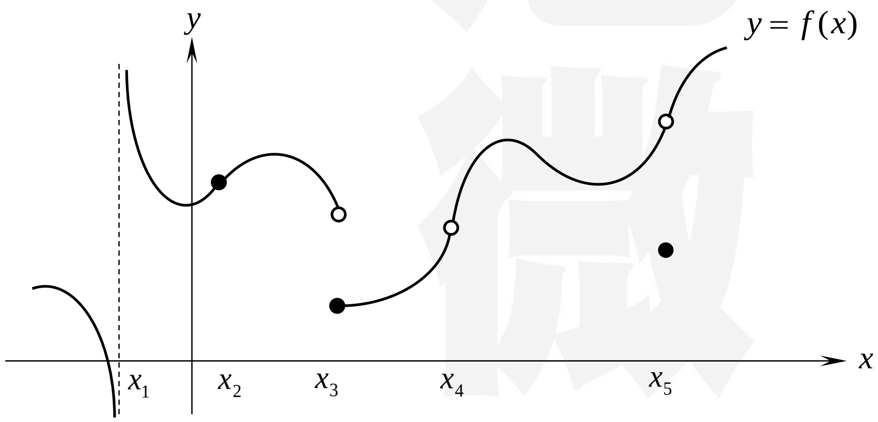
重點一 極限的直觀定義

1. 給定一個函數 $y=f(x)$，我們用

   (1) ＿＿＿＿＿＿＿ 表示當 x 從左方往 x_0 靠近時，$f(x)$ 會靠近的值

   (2) ＿＿＿＿＿＿＿ 表示當 x 從右方往 x_0 靠近時，$f(x)$ 會靠近的值

   (3) ＿＿＿＿＿＿＿ 表示當 x 往 x_0 靠近時，$f(x)$ 會靠近的值



x_1 ：＿＿＿＿＿＿＿

x_2 ：＿＿＿＿＿＿＿

x_3 ：＿＿＿＿＿＿＿

x_4 ：＿＿＿＿＿＿＿

x_5 ：＿＿＿＿＿＿＿

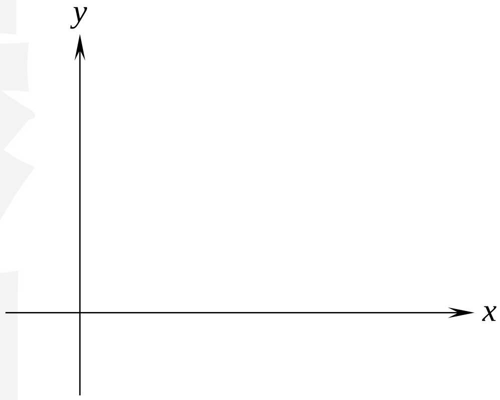
2. 極限存在的直觀定義：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff$$

例題 1.

Let $f(x)=3$. Does $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

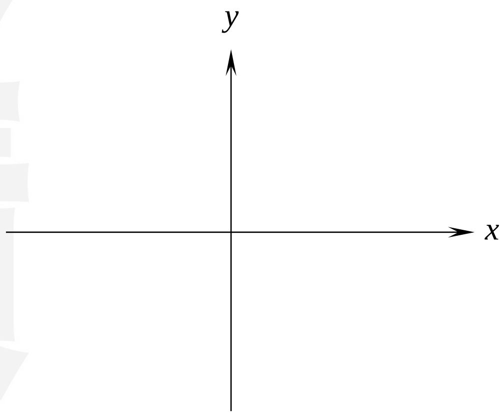
解



例題 2.

Let $f(x)=x$. Does $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

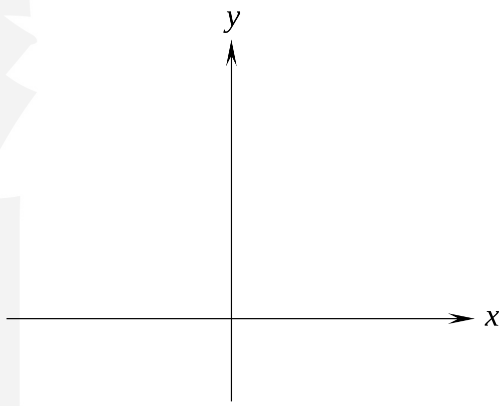
解



例題 3.

Let $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\neq 0 \\ 1 & \text{if } x=0 \end{cases}$. Does $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

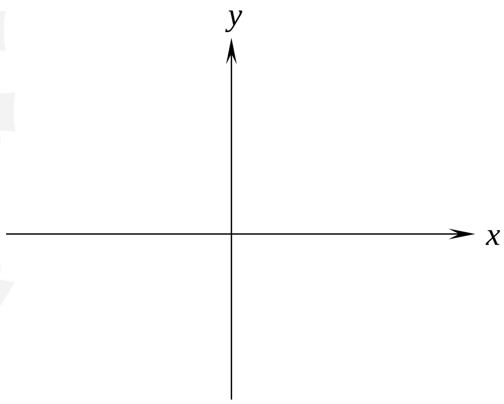
解



例題 4.

Let $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{if } x>0 \\ 1 & \text{if } x<0 \end{cases}$. Does $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

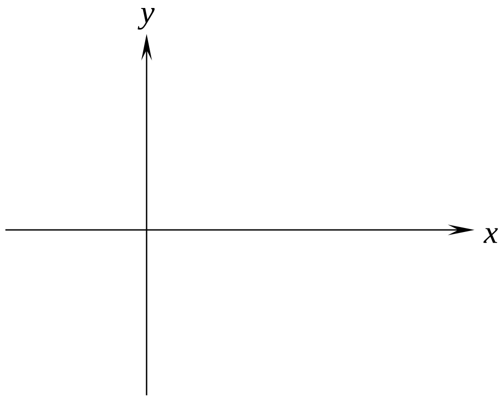
解



例題 5.

Let $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Does $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

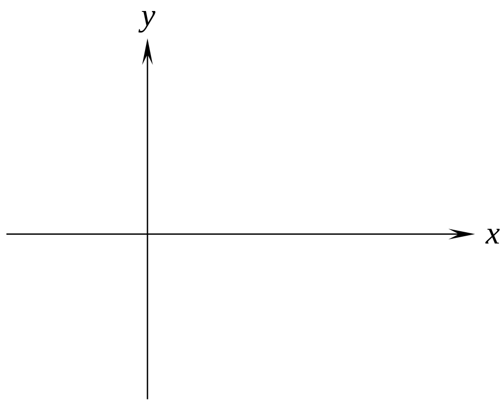
解



例題 6. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Does $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

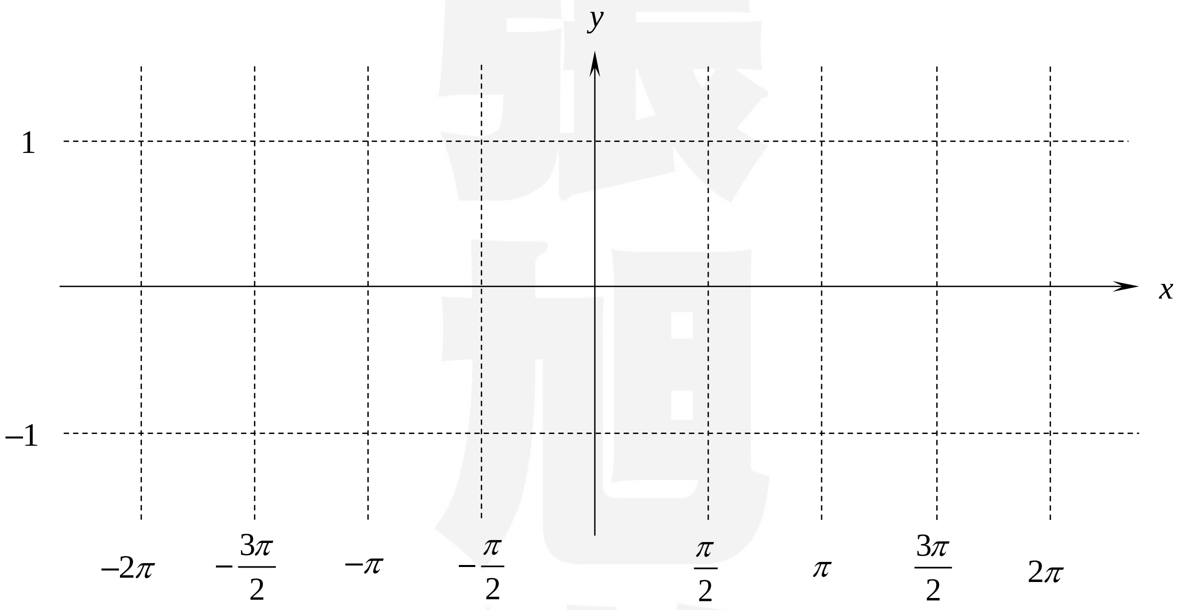
解



例題 7. (精選範例 1-2)

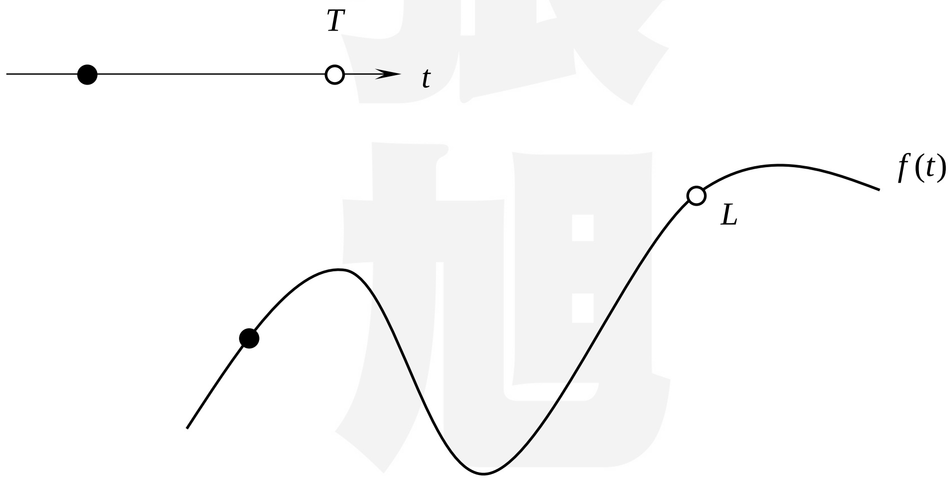
Let $f(x)=\sin(2x+\pi)$. Does $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exist? If it does, what is the value?

解



重點二 極限的嚴格定義

1. 用參數 (parameter) 的觀點看函數：



$\boxed{\text{結論}}$

$\lim\limits_{t \to T} f(x) = L \iff$

2. 極限存在的嚴格定義：

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff$

3. 此定義又稱爲 ε-δ 定義

例題 1.
Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x \to 1}(3x+2)=5$.

解

例題 2.
Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to -2}(5x-7)=-17$.

解

例題 3. (精選範例 2-1)
Apply the ε-δ defintion to show that $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)=9$.

解

例題 4. (精選範例 2-2)

Apply the ε-δ defintion to show that $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

解

例題 5. (精選範例 2-3)

Apply the ε-δ defintion to show that $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$.

解

重點二（補充）極限的唯一性

1. 若一函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的極限存在，則其極限值是唯一的。

說明

1° Suppose that $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ and $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=M$.

If $L\neq M$, then $\dfrac{|L-M|}{2}>0$.

2° $\because$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ and $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=M$

$\therefore$ $\exists\delta>0$ such that, $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-L|,|f(x)-M|<\dfrac{|L-M|}{2}$

So, $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, we have

$|L-M|\le|[L-f(x)]+[f(x)-M]|\le|L-f(x)|+|f(x)-M|<|L-M|$,

where yields a contradiction.

Hence $L=M$. [Q.E.D.]

2. 面對極限問題 $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$

$\Rightarrow$ 直觀猜值 $\Rightarrow$ 用嚴格定義證明 $\Rightarrow$ 唯一性告訴你此極限值唯一

重點三 一些基本函數的極限

1. $\lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$

說明

2. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

說明

3. $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = |x_0|$

$\boxed{\text{說明}}$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} x^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} \quad (x_0 > 0)$

$\boxed{\text{說明}}$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ $(a > 0)$

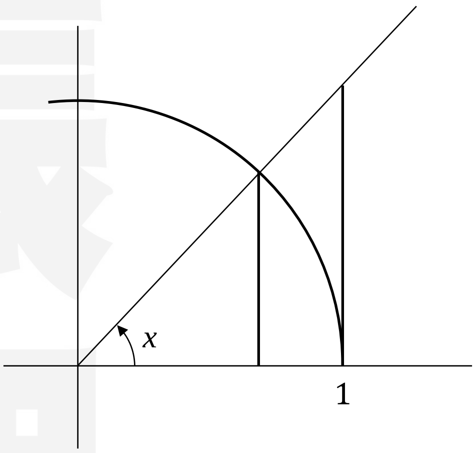
$\boxed{\text{說明}}$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ $(a > 0, x_0 > 0)$

$\boxed{\text{說明}}$

7. 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時，$\sin x < x < \tan x$

說明



8. $\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

說明

9. $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

$\boxed{\text{說明}}$

10. $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

$\boxed{\text{說明}}$

重點四 極限運算定理 (四則運算篇)

◎ 設 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ 且 $c \in \mathbb{R}$

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] =$ ________

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] =$ ________

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] =$ ________

(4) **若** $\boldsymbol{M \neq 0}$，則 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ ________

說明

(1)

(2)

(3) 1° Given $\varepsilon > 0$, since $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$,

$\exists \delta_1 > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2|M|+1}$

$\exists \delta_2 > 0$, $\exists K > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_2$, $|f(x)| < K$

$\because \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$

$\therefore \exists \delta_3 > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_3$, $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$

2° Let $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$,

then, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, we have

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\le |[f(x)g(x) - f(x)M] - [f(x)M - LM]| \\ &\le |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\ &\le |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2|M|+1} < \varepsilon . \end{aligned}$$

3° Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$. [Q.E.D.]

(4) 1° First we show that $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$:

Given $\varepsilon > 0$, since $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$,

$\exists \delta_1 > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|g(x) - M| < 2\varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_2$, $|g(x) - M| < \dfrac{|M|}{2}$

So, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_2$, we have

$|g(x)| = |[g(x) - M] + M| \ge |M| - |g(x) - M| > |M| - \dfrac{|M|}{2} = \dfrac{|M|}{2}$,

or equivalently, $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|M|}$

2° Let $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$,

then, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, we have

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\left|\frac{M-g(x)}{g(x)M}\right|=\frac{|g(x)-M|}{|g(x)||M|}<\frac{2\varepsilon}{\frac{2}{|M|}\cdot|M|}=\varepsilon$$

3° Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$.

4° By (3), we see that $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}]=L\cdot\frac{1}{M}=\frac{L}{M}$. [Q.E.D.]

例題 1.

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-1)$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-5}{3x+2}$ (3) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{2x-5}{3x+2}$

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Let $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$, show that $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

解

例題 3. (精選範例 4-2)

Show that $\lim\limits_{x \to x_0} x^{\frac{n}{m}} = x_0^{\frac{n}{m}}$, where $m,n \in \mathbb{N}$. ($x_0 > 0$)

解

例題 4. (精選範例 4-3)

Show that

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$ for $x_0 \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \sec x = \sec x_0$ for $x_0 \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

解

重點四（補充）極限的局部有界性質

1. 若一函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的極限存在，
   則 $\exists\delta>0$、$M>0$ 使得 $\forall 0<|x-x_0|<\delta$ 均有 $|f(x)|<M$

   說明

   1° Suppose that $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

   $\Rightarrow$ $\exists\delta>0$ such that, $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-L|<1$

   $\Rightarrow$ $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $L-1<f(x)<L+1$

   2° Let $M=\max\{|L+1|,|L-1|\}$

   $\because \begin{cases} L+1\le |L+1|\le M \\ L-1\ge -|L-1|\ge -M \end{cases}$

   $\therefore$ $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $-M\le L-1<f(x)<L+1\le M$

   $\Rightarrow$ $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)|<M$ [Q.E.D.]

重點五　極限運算定理（合成篇）

◎ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\boldsymbol{L}$ 且 $\lim\limits_{t\to \boldsymbol{L}} g(t)=g(\boldsymbol{L})$，

則 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=$ __________

說明

1° Given $\varepsilon>0$, since $\lim\limits_{t\to L} g(t)=g(L)$

$\exists\delta_1>0$ such that, $\forall 0<|t-L|<\delta_1$, $|g(t)-g(L)|<\varepsilon$.

$\because$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$,

$\therefore$ $\exists\delta>0$ such that, $\forall 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-L|<\delta_1$.

2° Now, for such $\delta>0$, if $0<|x-x_0|<\delta$,

then $|f(x)-L|<\delta_1$ and thus $|g(f(x))-g(L)|<\varepsilon$.

3° Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(L)$. [Q.E.D.]

例題 1.

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}|x^2+2|$

解

重點六 去零因子求極限

令 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 皆爲多項式，則：

1. $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$ 且 $\lim_{x\to x_0} Q(x)=Q(x_0)$

2. 若 $P(x_0)\neq 0$，則 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{Q(x)}{P(x)}=$ ________

3. 若 $P(x_0)=0$ 但 $Q(x_0)\neq 0$，則 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{Q(x)}{P(x)}=$ ________

4. 看到 $P(x_0)=Q(x_0)=0$ $\Rightarrow$ ____________________

5. 看到 分子代 x_0 = 分母代 $x_0=0$ 且 分子分母有根號 $\Rightarrow$ ____________________

例題 1.
Find the following limits.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$ (3) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

解

例題 2. (精選範例 6-1)
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})\frac{1}{x-3}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x^3-1}{x^2-1}-\frac{x-\frac{1}{x}}{x-1})$

解

例題 3. (精選範例 6-2)

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2}$

解

重點六（補充）如何證明極限不存在

1. 若極限存在，譬如說 $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$，

   則 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall 0<|x-x_0|<\delta,\ |f(x)-L|<\varepsilon$

2. 所以若極限不存在，即對任意 $L\in\mathbb{R}$，$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ 均不成立

   針對任一個 $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$，$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ 不成立的嚴格敘述如下：

   $\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0$ s.t. $\exists x$ 滿足 $0<|x-x_0|<\delta,\ |f(x)-L|\ge\varepsilon$

3. 因此，$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的定義爲：

   $\forall L\in\mathbb{R},\ \exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0$ s.t. $\exists x$ 滿足 $0<|x-x_0|<\delta,\ |f(x)-L|\ge\varepsilon$

說例

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在

說明

1° Given $L\in\mathbb{R}$, W.L.O.G. may assume $L>0$, consider $\varepsilon=1$

Given $\delta>0$, choose $x=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{2(L+1)}\}$

$\because\ \frac{\delta}{2}>0$ and $\frac{1}{2(L+1)}>0$

$\therefore\ x>0$

$\Rightarrow\ |x-0|=|x|=x>0$ and $|x-0|=|x|=x\le\frac{\delta}{2}<\delta$

$\Rightarrow\ 0<|x-0|<\delta$

2° Now, for such x

If $\frac{\delta}{2}<\frac{1}{2(L+1)}$

then $x=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{2(L+1)}\}=\frac{\delta}{2}$ and $\frac{2}{\delta}>2(L+1)=2L+2$

It implies that $|f(x)-L|=|\frac{1}{x}-L|=|\frac{2}{\delta}-L|=|L+2|>1=\varepsilon$

If $\frac{\delta}{2}\ge\frac{1}{2(L+1)}$

then $x=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{2(L+1)}\}=\frac{1}{2(L+1)}=\frac{1}{2L+2}$

In this case, $|f(x)-L|=|\dfrac{1}{x}-L|=|(2L+2)-L|=|L+2|>1=\varepsilon$

3° Since L is arbitrary, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ does not exist. [Q.E.D.]

(2) 設 $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在

$\boxed{\text{說明}}$

1° For $L\neq\pm1$, choose $\varepsilon=\min\{\dfrac{|L-1|}{2},\dfrac{|L+1|}{2}\}$

Given $\delta>0$, choose $x=\dfrac{\delta}{2}>0$

$\Rightarrow$ $|x-0|=|x|=x>0$ and $|x-0|=|x|=x=\dfrac{\delta}{2}<\delta$

$\Rightarrow$ $0<|x-0|<\delta$

In this case, for such x

If $x\in\mathbb{Q}$, $|f(x)-L|=|-1-L|=|L+1|>\dfrac{|L+1|}{2}\geq\min\{\dfrac{|L-1|}{2},\dfrac{|L+1|}{2}\}=\varepsilon$

If $x\notin\mathbb{Q}$, x $L=1$

$|f(x)-L|=|1-L|=|L-1|>\dfrac{|L-1|}{2}\geq\min\{\dfrac{|L-1|}{2},\dfrac{|L+1|}{2}\}=\varepsilon$

This show that $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq L$ for any $L\neq\pm1$

2° For , choose $\varepsilon=1$

Given $\delta>0$, choose $x\in\mathbb{Q}$ with $0<|x-0|<\delta$

In this case, for such x

$|f(x)-L|=|-1-1|=2>1=\varepsilon$

This shows that $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq 1$

3° For $L=-1$, choose $\varepsilon=1$

Given $\delta>0$, choose $x\notin\mathbb{Q}$ with $0<|x-0|<\delta$

In this case, for such

$|f(x)-L|=|1-(-1)|=2>1=\varepsilon$

This shows that $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq -1$

4° By 1°, 2° and 3°, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ does not exist. [Q.E.D.]

重點七 去絕對值求極限

1. $\lim\limits_{x \to x_0} |x| =$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|} =$ 　　　但 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|} =$

例題 1.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^3 + x^3}{x} = ?$

解

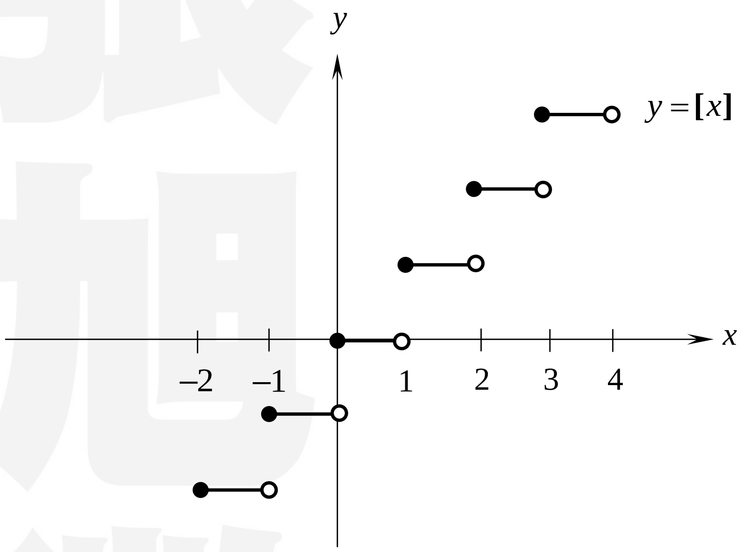
例題 2. (精選範例 7-1)

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}}\right) = ?$

解

重點八 高斯符號求極限

1. $[x]=$ ________________



$\boxed{\text{說例}}$

(1) $[1.6]=$ ________

(2) $[2]=$ ________

(3) $[-2.31]=$ ________

2. 當 n 爲整數時，

(1) $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=$ ________

(2) $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=$ ________

(3) $\lim\limits_{x\to n}[x]$ ________

3. 當 x_0 爲不爲整數時，$\lim\limits_{x\to x_0}[x]=$ ________

例題 1.

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(2[x]+7)$ (2) $\lim\limits_{x\to -1^-} x[x]$

解

例題 2. (精選範例 8-1)

Find the following limits. ($n \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)

(1) $\lim_{x\to n}[x-[x]]$ (2) $\lim_{x\to n}[[x]-x]$ (3) $\lim_{x\to x_0}[x-[x]]$ (4) $\lim_{x\to x_0}[[x]-x]$

解

例題 3. (精選範例 8-2)

Find the following limits. ($n \in \mathbb{Z}$)

(1) $\lim\limits_{x \to n^+} [\![2x]\!]$ (2) $\lim\limits_{x \to n^-} [\![2x]\!]$ (3) $\lim\limits_{x \to n} [\![\,[\![2x]\!] - x\,]\!]$

解

重點九 含無窮符號之極限

1. 實數中有兩個符號，$+\infty$ 和 $-\infty$；

   $+\infty$ 比任何數大，$-\infty$ 比任何數小，但他們不是一個數；

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, $f(x) > M$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff$ ________________________________

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ such that, $\forall x > M$, $|f(x) - L| < \varepsilon$

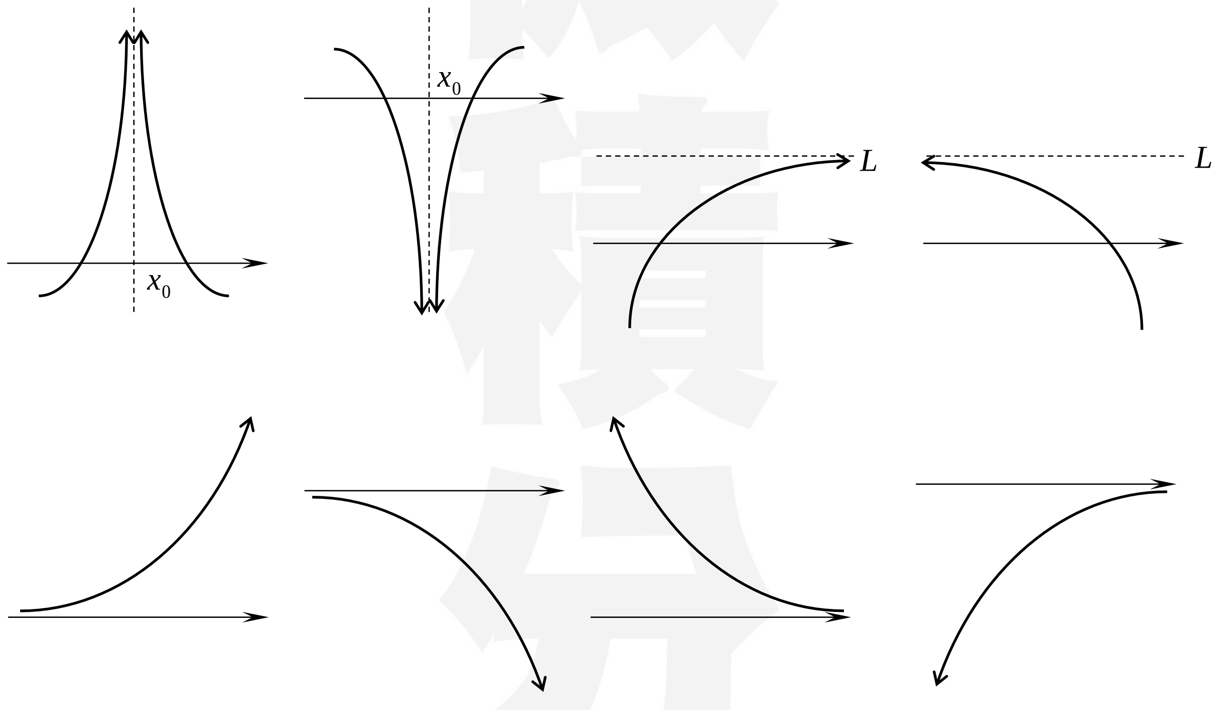
5. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L \iff$ ________________________________

6. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0$, $\exists N > 0$ such that, $\forall x > M$, $f(x) > N$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \iff$ ________________________________

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \iff$ ________________________________

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff$ ________________________________



例題 1. (精選範例 9-1)

Show that $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

解

例題 2. (精選範例 9-1)

Show that $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

解

例題 3. (精選範例 9-1)

Show that $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

解

例題 4. (精選範例 9-2)

Show that $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{3x^2+2x-1} = 0$

解

例題 5. (精選範例 9-2)

Show that $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+3}{x^2+2x-7}=5$

解

例題 6. (精選範例 9-2)

Show that $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+3}{x}=\infty$

解

重點十之一　老大比較法：多項式分式

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\_\_\_\_ & 若\ n>m\\ \_\_\_\_ & 若\ n=m\\ \_\_\_\_ & 若\ n<m\end{cases}$

2. 遇到多項式分式取無窮遠點的極限 $\Rightarrow$ 老大比較法：分子分母只保留 ________

3. 老大比較法亦適用於：(1) 分數次方　(2) 多項式整體取 n 次方根

例題 1.

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x+1}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-5}$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+2}{3x^2+2x-5}$　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2}{-3x^3+1}$

解

例題 2. (精選範例 10-1-1)

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}+3)(3x^2-1)}{(4x-3)(2x^{\frac{3}{2}}+5)}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^6-x}}{2x^3+1}$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4}$ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

解

例題 3. (精選範例 10-1-2)

Find the following limits.

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$ (2) $\lim_{x\to 9}(\sqrt{x^2+9}-x)$

解

重點十之二 老大比較法：指數函數分式

例題 1.
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 3^x+2\cdot 4^x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x}$

解

例題 2. (精選範例 10-2-1)
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 3^x+2\cdot 4^x}$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x}$ (3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cdot 3^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x}$

解

例題 3. (精選範例 10-2-2)
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot(\frac{1}{5})^x-3\cdot(\frac{2}{3})^x}{7\cdot(\frac{1}{3})^x+2\cdot(\frac{4}{5})^x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot(\frac{1}{5})^x-3\cdot(\frac{2}{3})^x}{7\cdot(\frac{2}{3})^x+2\cdot(\frac{3}{5})^x}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot(\frac{1}{5})^x-3\cdot(\frac{1}{3})^x}{7\cdot(\frac{2}{3})^x+2\cdot(\frac{1}{5})^x}$

解

重點十之三 老大比較法：叉叉接旨刺 log

◎ 當 $x \to \infty$ 時，我們有 ______ >> ______ >> ______ >> ______ >> ______

例題 1.
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n^3}$

解

例題 2. (精選範例 10-3-1)
Find the following limits.

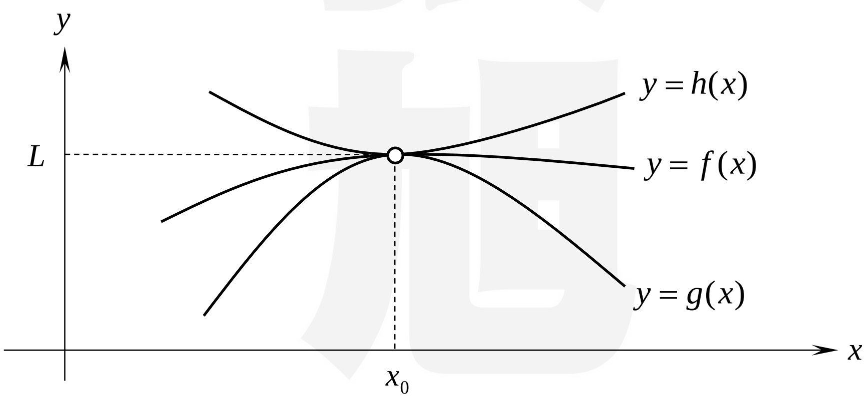
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n!}}$

解

重點十一 夾擠定理

1. 定理內容：

若 $\begin{cases} \exists \eta > 0 \text{ 使得 } \forall 0 < |x - x_0| < \eta \text{ 皆有 } g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \end{cases}$，則：________________



說明

1° Given $\varepsilon > 0$, since $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$,

$\exists \delta_0 > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_0$, $|g(x) - L| < \varepsilon$ and $|h(x) - L| < \varepsilon$.

So, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta_0$, $g(x) > L - \varepsilon$ and $h(x) < L + \varepsilon$

2° Let $\delta = \min\{\eta, \delta_0\}$,

then, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, we have

$L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon$

$\Rightarrow \ -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$\Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$

3° Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. [Q.E.D.]

2. 此定理當 $x_0 = \infty$ 或 $x_0 = -\infty$ 時也可以使用！

例題 1.

Show that $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解

例題 2.

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})$

解

例題 3. (精選範例 11-1)

Let $f(x)=\begin{cases} x, & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ and $g(x)=\begin{cases} x, & \text{if } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{if } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$, show that

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

解

例題 4. (精選範例 11-2)

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{3^x+5^x+7^x}$

解

重點十二 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 專論

◎ 永遠不要忘記 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

例題 1.
Find the following limits.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$

解

例題 2.
Find the following limits.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

例題 3. (精選範例 12-1)

Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

解

◎ **心得：**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$　　(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos}{x}=$　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-\cos}{x}=$

YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

講義實體書販售中

張旭微積分下學期課程販售中

詳情請關注張旭老師各社群平台

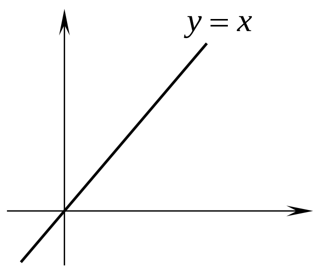
或直接私訊張旭老師取得商店連結

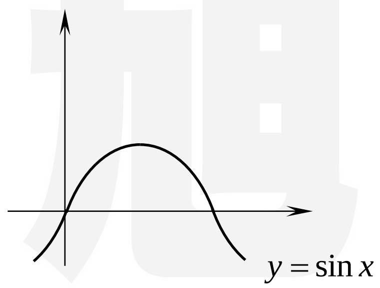
第二章 連續

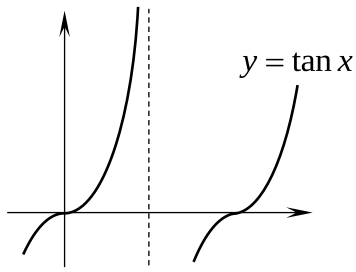
- 好好把握這最短的一章啊

重點一 連續的概念

1. 連續的直觀看法：在畫函數圖形時，能夠 ______________ 的就是連續函數







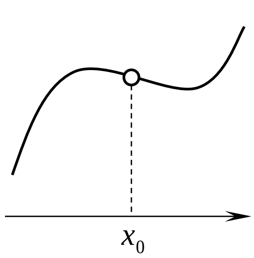
____________　　　　____________　　　　____________

2. 函數 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 不連續有以下三種可能情況：

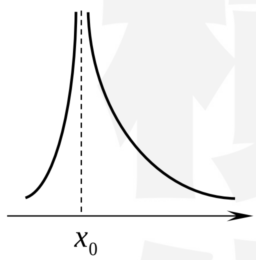
(1) $f(x_0)$ 不存在 (如圖一和圖二)

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 (如圖二和圖三)

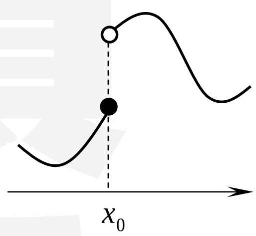
(3) $f(x_0)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ (如圖四)



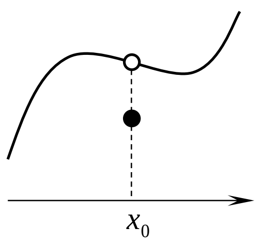
【圖一】



【圖二】



【圖三】



【圖四】

3. 函數連續不連續要 _______________ !

4. 函數 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續的定義：

5. 函數 $y=f(x)$ 在 (a,b) 連續

$\Leftrightarrow$ ______________________________

6. 常數函數、多項式函數、三角函數、指數函數、對數函數、$f(x)=|x|$ 和 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ 在定義域上都是連續函數

◎ 請複習第一章重點三

例題 1.

Show that $f(x)=|x|$ is continuous on $\mathbb{R}$.

解

例題 2. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Where is $f(x)$ continuous?

解

例題 3. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=\begin{cases}x & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Where is $f(x)$ continuous?

解

重點二 連續函數的運算定理

1. 四則運算篇：

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $x=x_0$ 連續，且 $c\in\mathbb{R}$，則：

(1) $c\cdot f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續

(2) $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 連續

(3) $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 連續

(4) 若 $\boldsymbol{g(x_0)\neq 0}$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=x_0$ 連續

說明

請參考第一章重點四

2. 合成篇：

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續且 $g(x)$ 在 $x=f(x_0)$ 連續，

則 $g(f(x))$ 在 $x=x_0$ 連續

說明

請參考第一章重點五

【口訣】

例題 1.

Find the x-values (if any) at which $f(x)$ is not continuous.

(1) $f(x)=x-\cos x$　　(2) $f(x)=\sqrt{\tan x}$　　(3) $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-36}$

解

例題 2.

Find the x-values (if any) at which $f(x)$ is not continuous.

(1) $f(x)=\begin{cases} -2x+3, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \tan\dfrac{\pi x}{4}, & |x|<1 \\ x, & |x|\geq 1 \end{cases}$

解

例題 3. (精選範例 2-1)

Find the constants a and b such that the function is continuous on the entire real line.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x}, & x<0 \\ a-2x, & x\ge 0 \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ ax+b, & -1<x<3 \\ -2, & x\ge 3 \end{cases}$

解

重點三 極限和連續的聯手

◎ 若 $g(x)$ 是連續函數，

則 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) =$ ____________

$\boxed{\text{說明}}$

請參考第一章重點五

【口訣】

例題 1.

Find the x-values (if any) at which $f(x)$ is not continuous.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\sin(\cos(\pi x))$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}|5^x - 2|$ (3) $\lim\limits_{x\to 1}(\log_2 x)^2$

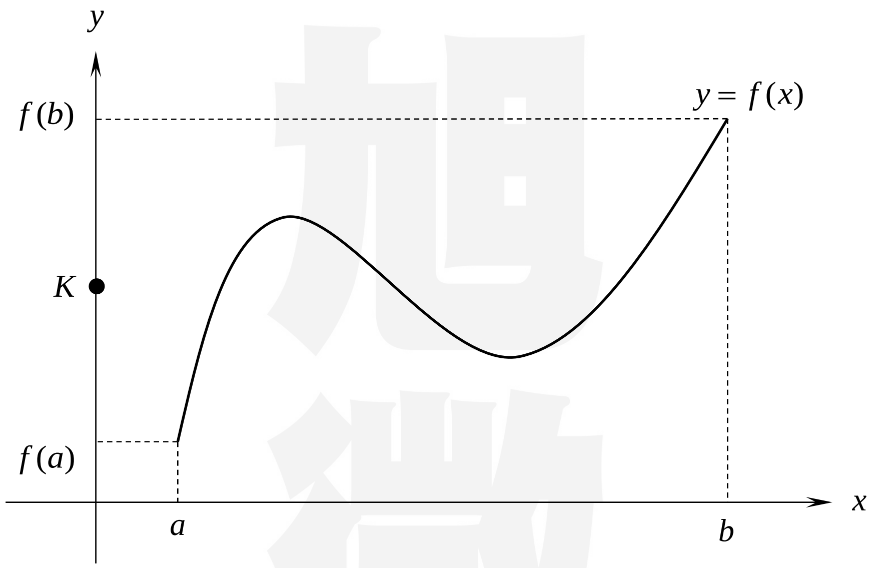
解

重點四 連續函數的中間值定理

1. 設 $f(x)$ 為一在 $[a,b]$ 上的連續函數。

   若 K 為一個介在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的實數的話，

   則：________________________________



2. 此定理目前無法證明。欲知如何證明者，請參考**高等微積分**用書。

例題 1.
For $f(x)=x^2+x-1$ on $[0,5]$ and $f(c)=11$, verify that the Intermediate Value Theorem applies to the indicated interval and find the value of c guaranteed by the theorem.

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Let $f(x)$ be continuous on $[a,b]$. Suppose that $f(a)\cdot f(b)<0$. Show that $f(x)$ must have at least one root in $[a,b]$.

解

例題 3. (精選範例 4-2)

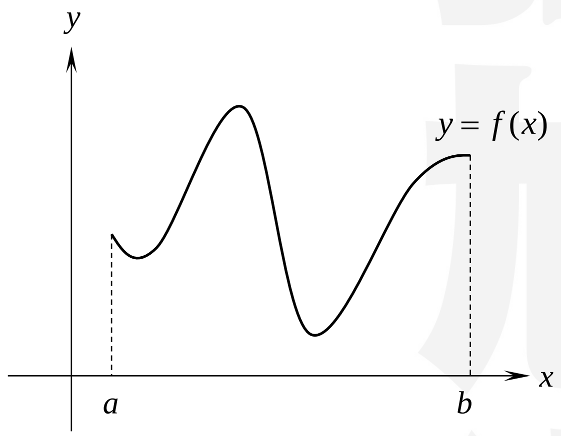
Let $f(x)$ be continuous on $[0,1]$ and $0\le f(x)\le 1$ for all $x\in[0,1]$. Show that there must be some number $c\in[0,1]$ such that $f(c)=c$.

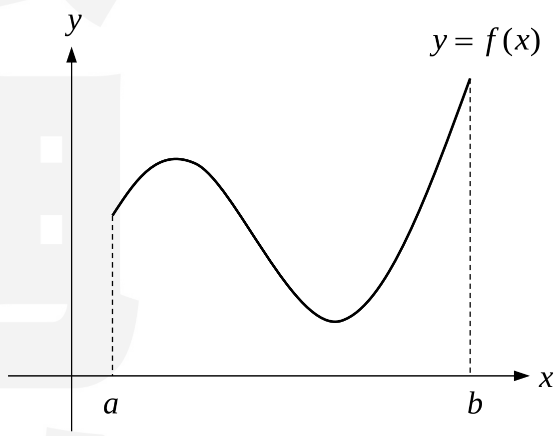
解

重點五 連續函數的極值定理

1. 設 $f(x)$ 爲一在 $[a,b]$ 上的連續函數，

則存在 $c_1, c_2 \in [a,b]$ 使得 $\begin{cases} f(c_1) = \\ f(c_2) = \end{cases}$





2. 此定理目前無法證明。欲知如何證明者，請參考**高等微積分**用書。

例題 1.

Find the maximum and the minimum of $f(x) = x^2 - 4x + 5$ on $[-1,3]$.

解

例題 2.
Give an example of a continuous and bounded function on all of $\mathbb{R}$ that does not attain its maximum or minimum.

解

YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

講義實體書販售中

張旭微積分下學期課程販售中

詳情請關注張旭老師各社群平台

或直接私訊張旭老師取得商店連結

第三章 微分

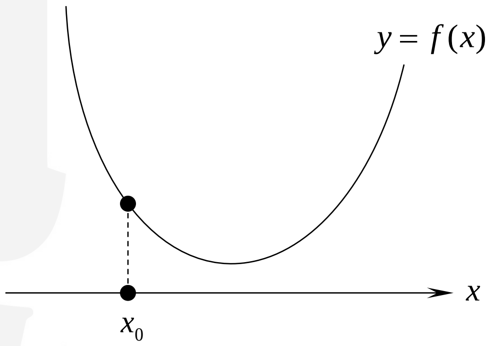
- 始於斜率，終於斜率

重點一 導數與微分的概念

1. 給定一個函數 $y=f(x)$，我們用 ______ 表示此函數在 $x=x_0$ 的切線斜率。

$f'(x_0)=$

$=$



2. $f'(x_0)$ 稱爲 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 ______

3. $f'(x)$ 稱爲 $f(x)$ 的 ______

4. 將 $f(x)$ 變成 $f'(x)$ 的動作叫做 ______

5. ______：將 $f(x)$ 對 x 微分，所得爲 ______

6. ______：將 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 對 x 微分，所得爲 ______

7. 若 $f'(x_0)$ 存在，則我們說 $f(x)$ 在 $x=x_0$ ______

8. 函數可微分的定義：

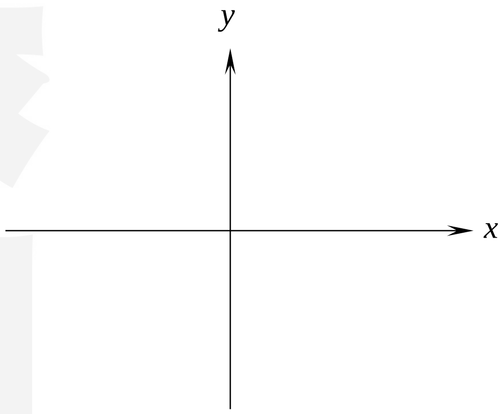
$f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微 $\Leftrightarrow$

9. $f(x)$ 在 (a,b) 可微 $\Leftrightarrow$ ______

例題 1.

Let $f(x)=c$, where $c\in\mathbb{R}$. Show that $f'(x)=0$.

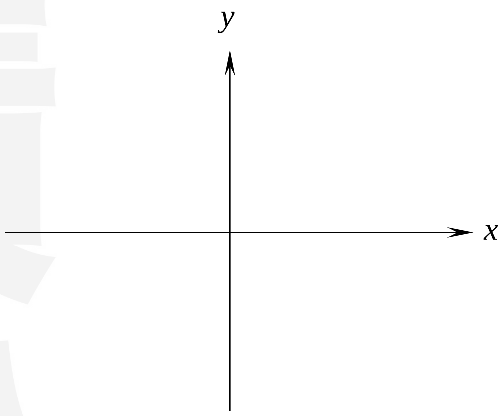
解



例題 2.

Let $f(x)=x$. Show that $f'(x)=1$.

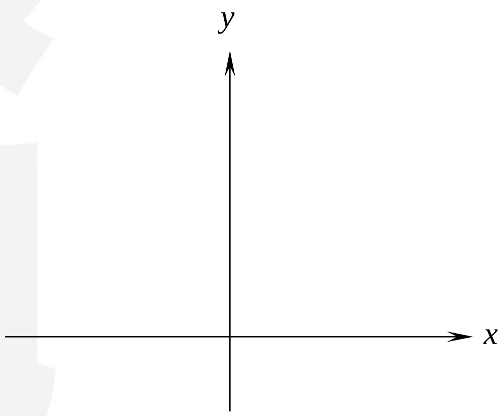
解



例題 3.

Let $f(x)=x^2$. Show that $f'(x)=2x$.

解



例題 4.

Let $f(x)=x^n$, where $n\in\mathbb{N}$. Show that $f'(x)=nx^{n-1}$.

解

例題 5. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=a^x$. Show that $f'(x)=a^x \ln a$.

解

例題 6. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=\log_a x$. Show that $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

解

例題 7. (精選範例 1-2)
Show that $(\sin x)' = \cos x$.
解

例題 8. (精選範例 1-2)
Show that $(\cos x)' = -\sin x$.
解

例題 9. (精選範例 1-3)
Let $f(x)$ be differentiable at $x = x_0$. Show that $f(x)$ is continuous at $x = x_0$.
解

例題 10. (精選範例 1-3)
Let $f(x)$ be continuous at $x = x_0$. Must $f(x)$ be differentiable at $x = x_0$?
解

例題 11. (精選範例 1-4)

If $f'(1)=2$, find the following limits.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+6h)-f(1)}{h}$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1-7h)}{h}$

解

例題 12. (精選範例 1-5)

If $f(1)=0$ and $f'(1)=3$, find $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)}{6h}$

解

重點一（補充）自然底數、自然指數與自然對數

1. 存錢問題：

設本金 A，年利率 r，複利計息，若分 n 期則期利率爲 $\frac{r}{n}$

(1) 若分一期，期滿可得：$A(1+r)$

若分二期，期滿可得：$A(1+\frac{r}{2})^2$

若分三期，期滿可得：$A(1+\frac{r}{3})^3$

依此類推，若分 n 期，期滿可得：$A(1+\frac{r}{n})^n$

(2) 問題：分幾期最划算？

說明

由算幾不等式知：$\dfrac{\overbrace{(1+\frac{r}{n})+(1+\frac{r}{n})+\cdots+(1+\frac{r}{n})}^{n\text{ 個}}+1}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{(1+\frac{r}{n})^n\cdot 1}$

$$\Rightarrow\ (1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{n+1}}\le\frac{n(1+\frac{r}{n})+1}{n+1}=\frac{n+r+1}{n+1}=1+\frac{r}{n+1}$$

$$\Rightarrow\ (1+\frac{r}{n})^n\le(1+\frac{r}{n+1})^{n+1}$$

$$\Rightarrow\ A(1+\frac{r}{n})^n\le A(1+\frac{r}{n+1})^{n+1}$$

故分期數越多越划算！

(3) 問題：若銀行眞的讓你分無限期，一年後你會不會獲得無限多錢？

說明

$$\begin{aligned}(1+\frac{r}{n})^n&=C_0^n+C_1^n\cdot\frac{r}{n}+C_2^n\cdot(\frac{r}{n})^2+C_3^n\cdot(\frac{r}{n})^3+\cdots+C_n^n\cdot(\frac{r}{n})^n\\&=1+n\cdot\frac{r}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot(\frac{r^2}{n^2})+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot(\frac{r^3}{n^3})+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{r^n}{n^n}\\&=1+r+\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^2}{2!}+\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^3}{3!}+\cdots+\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^n}{n!}\\&<1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}\\&<1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}+\cdots\quad\text{(增項增爲無窮級數)}\end{aligned}$$

設 $a_k=\dfrac{r^k}{k!}$

則 $1+r+\dfrac{r^2}{2!}+\dfrac{r^3}{3!}+\cdots+\dfrac{r^n}{n!}+\cdots=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

因 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{\dfrac{r^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{r^k}{k!}}=\dfrac{r}{k+1}$

取 $K\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $k\geq K$ 均有 $\dfrac{r}{k+1}<\dfrac{1}{2}$

則當 $k\geq K$ 以後，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}<\dfrac{1}{2}$

故 $a_{K+1}<\dfrac{1}{2}a_K$ ，$a_{K+2}<\dfrac{1}{2}a_{K+1}<\dfrac{1}{2^2}a_K$ ，…，$a_{K+m}<\dfrac{1}{2^m}a_K$

若令 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=M\quad(0<M<\infty)$

則
$$\begin{aligned}a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots&=\underbrace{a_0+\cdots+a_{K-1}}_{M}+a_K+a_{K+1}+a_{K+2}+\cdots\\&<M+a_K+\frac{1}{2}a_K+\frac{1}{2^2}a_K+\cdots\\&=M+a_K(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots)\\&=M+a_K\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\&=M+2a_K\\&=M+2\cdot\frac{r^K}{K!}<\infty\end{aligned}$$

既然 n 是任意的，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{r}{n})^n<M+2\cdot\dfrac{r^K}{K!}<\infty$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}A(1+\dfrac{r}{n})^n<AM+\dfrac{2Ar^K}{K!}<\infty$

故就算分無限期，一年以後還是不會無限多錢

(4) 既然 $A(1+\dfrac{r}{n})^n$ 隨著 n 增加而增加

且對任意正整數 n 均有 $A(1+\dfrac{r}{n})^n<AM+\dfrac{2Ar^K}{K!}<\infty$

所以 $A(1+\dfrac{r}{n})^n$ 當 $n\to\infty$ 時的極限必存在

即 $\lim\limits_{n\to\infty}A(1+\dfrac{r}{n})^n\in\mathbb{R}$

(5) 特別來說，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \in \mathbb{R}$

我們令此特別的極限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

(6) e 稱爲自然底數，其值約爲 2.718281828…

2. 自然指數與自然對數：

(1) 自然指數函數：$f(x)=e^x$；若將其微分得 $f'(x)=e^x$

(2) 自然對數函數：$f(x)=\log_e x=\ln x$；若將其微分得 $f'(x)=\frac{1}{x}$

重點二 微分的運算律

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $x=x_0$ 可微，則：

(1) $(c\cdot f)(x)$ 在 $x=x_0$ 必可微且 $(c\cdot f)'(x_0)=$ ________

(2) $(f+g)(x)$ 在 $x=x_0$ 必可微且 $(f+g)'(x_0)=$ ________

(3) $(f\cdot g)(x)$ 在 $x=x_0$ 必可微且 $(f\cdot g)'(x_0)=$ ________________

(4) **若 $\boldsymbol{g(x_0)\neq 0}$**，則 $(\dfrac{f}{g})(x)$ 必可微且 $(\dfrac{f}{g})'(x_0)=$ ________________

說明

(1) $(c\cdot f)'(x_0)=$

(2) $(f+g)'(x_0)=$

(3) $$(f+g)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}]$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\quad\text{[Q.E.D.]}$$

(4) $$\because\ (\frac{1}{g})'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{1}{g})(x_0+h)-(\frac{1}{g})(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0+h)g(x_0)}$$
$$=\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\therefore\ (\frac{f}{g})'(x_0)=(f\cdot\frac{1}{g})'(x_0)$$
$$=f'(x_0)(\frac{1}{g})(x_0)+f(x_0)(\frac{1}{g})'(x_0)$$
$$=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$
$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\quad\text{[Q.E.D.]}$$

口訣

◎ 相乘的微分 ⇒ ______________________________

◎ 相除的微分 ⇒ ______________________________

例題 1.

Show that $(\tan x)' = \sec^2 x$ and $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

解

例題 2. (精選範例 2-1)

Find the derivative of the given function $f(x)$ at the point $x = x_0$.

(1) $f(x) = 2x^3 + 5$, $x_0 - 1$

(2) $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$, $x_0 = 1$

(3) $f(x) = \sin x \cos x$, $x_0 = 0$

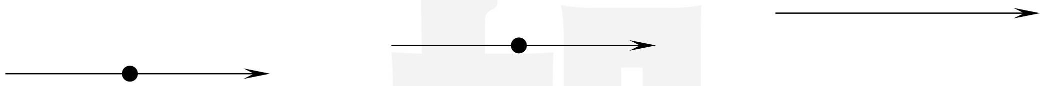
(4) $f(x) = a^x \log_a x$, $x_0 = 1$

解

重點三 微分合成律 (連鎖律)

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，且 $g(x)$ 在 $x=f(x_0)$ 可微，

則 $(g\circ f)(x)$ 在 $x=x_0$ 必可微且 $(g\circ f)'(x_0)=$ ________________



説明

1° Define $F(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{if } y\neq f(x_0)\\ g'(f(x_0)) & \text{if } y=f(x_0)\end{cases}$

$$\lim_{y\to f(x_0)}F(y)=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}=g'(f(x_0))=F(f(x_0))$$

2° For $t\neq x_0$,

if $f(t)=f(x_0)$,

then $\dfrac{g(f(t))-g(f(x_0))}{t-x_0}=0=F(f(t))\cdot\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$;

If $f(t)\neq f(x_0)$,

then $\dfrac{g(f(t))-g(f(x_0))}{t-x_0}=\dfrac{g(f(t))-g(f(x_0))}{f(t)-f(x_0)}\cdot\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=F(f(t))\cdot\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$.

3° So, $(g\circ f)'(x_0)=\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(x_0)}{t-x_0}=\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{g(f(t))-g(f(x_0))}{t-x_0}$

$=\lim\limits_{t\to x_0}[F(f(t))\cdot\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}]=F(f(x_0))f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ [Q.E.D.]

例題 1.

Calculate (1) $[(2x+5)^{100}]'$ (2) $[\sin(2x+5)]'$ (3) $(2^{\sin x})'$ (4) $[\log_3(5^x+1)]'$

解

例題 2. (精選範例 3-1)

Show that $|x|' = \dfrac{x}{|x|}$ and $|f(x)|' = \dfrac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$.

解

例題 3. (精選範例 3-2)

Let $f(x)=x^{p}$, where $p\in\mathbb{Q}$. Show that $f'(x)=px^{p-1}$.

解

例題 4. (精選範例 3-3)

Differentiate the following functions.

(1) $f(x)=|2x+5|$ (2) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ (3) $f(x)=(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

(4) $f(x)=\log_2|x+1|$ (5) $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

解

重點四 反三角函數的導函數

1. 反三角函數的寫法：

(1) $\sin x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

(2) $\cos x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

(3) $\tan x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

(4) $\csc x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

(5) $\sec x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

(6) $\cot x \xrightarrow{\text{反}}$ ________

2. 反三角函數與三角函數的關係：

(1) $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

(2) $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

(3) $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

(4) $y = \csc^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

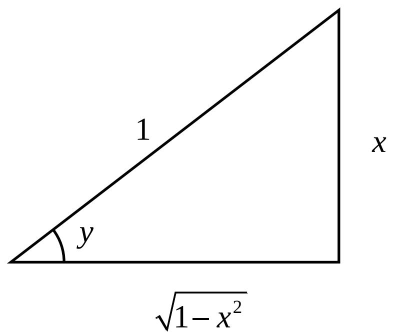
(5) $y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

(6) $y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow$ ________

3. **反三角函數微分四大步驟**： (以微分 $\sin^{-1} x$ 爲例)

$\boxed{\text{消反}}$ 令 $y = \sin^{-1} x \Rightarrow \sin y = x$

$\boxed{\text{畫圖}}$ 如右圖



$\boxed{\text{微分}}$ $(\sin y)' = x' \Rightarrow$

$\boxed{\text{還原}}$ 故 $(\sin^{-1} x)' =$

4. 反三角函數的定義域和值域

函數	定義域	值域
$y=\sin^{-1}x$	$-1\le x\le 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$
$y=\cos^{-1}x$	$-1\le x\le 1$	$0\le y\le\pi$
$y=\tan^{-1}x$	$x\in\mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$
$y=\cot^{-1}x$	$x\in\mathbb{R}$	$0\le y\le\pi$
$y=\sec^{-1}x$	$x\le -1$ 或 $x\ge 1$	$0\le y\le\pi$ 但 $y\ne\frac{\pi}{2}$
$y=\csc^{-1}x$	$x\le -1$ 或 $x\ge 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ 但 $y\ne 0$

5. 反三角函數的其他寫法：

(1) $\arcsin x=\sin^{-1}x$ (2) $\arccos x=\cos^{-1}x$ (3) $\arctan x=\tan^{-1}x$

(4) $\mathrm{arc}\csc x=\csc^{-1}x$ (5) $\mathrm{arc}\sec x=\sec^{-1}x$ (6) $\mathrm{arc}\cot x=\cot^{-1}x$

例題 1. (精選範例 4-1)

Differentiate the following functions: $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, and $\sec^{-1} x$.

解

重點五 微分表

冪函數與絕對值微分	
$(c)'=0$ $\quad(c\in\mathbb{R})$	$(x^{p})'=px^{p-1}$ $\quad(p\in\mathbb{Q}$，$p\neq 0)$
$\lvert x\rvert'=\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	$\lvert f(x)\rvert'=\dfrac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert}\cdot f'(x)$
三角函數微分	
$(\sin x)'=\cos x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\sec x)'=\sec x\tan x$
$(\tan x)'=\sec^{2}x$	$(\cot x)'=-\csc^{2}x$
反三角函數微分	
$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\csc^{-1}x)'=\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^{2}-1}}$
$(\cos^{-1}x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\sec^{-1}x)'=\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^{2}-1}}$
$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$(\cot^{-1}x)'=\dfrac{-1}{1+x^{2}}$

重點六 萊布尼茲微分符號與隱函數微分法

1. 關於 $\frac{d}{dx}$ 這個符號：

(1) 將 $f(x)$ 對 x 微分 $\Rightarrow$ ________

(2) 將 $f(t)$ 對 t 微分 $\Rightarrow$ ________

(3) 將 $f(s)$ 對 s 微分 $\Rightarrow$ ________

(4) 將 $f(s)$ 對 x 微分 $\Rightarrow$ ________

(5) 將 $2s^2+5x-\sin t$ 對 x 微分 $\Rightarrow$ ________

2. 關於高階微分：

(1) 將 $f(x)$ 對 x 微分 1 次 $\Rightarrow$ ________ = ________

(2) 將 $f(x)$ 對 x 微分 2 次 $\Rightarrow$ ________ = ________

(3) 將 $f(x)$ 對 x 微分 3 次 $\Rightarrow$ ________ = ________

(4) 將 $f(x)$ 對 x 微分 n 次 $\Rightarrow$ ________ = ________

例題 1.

For $xy=1$, find $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $(x,y)=(1,1)$?

解

例題 2. (精選範例 6-1)

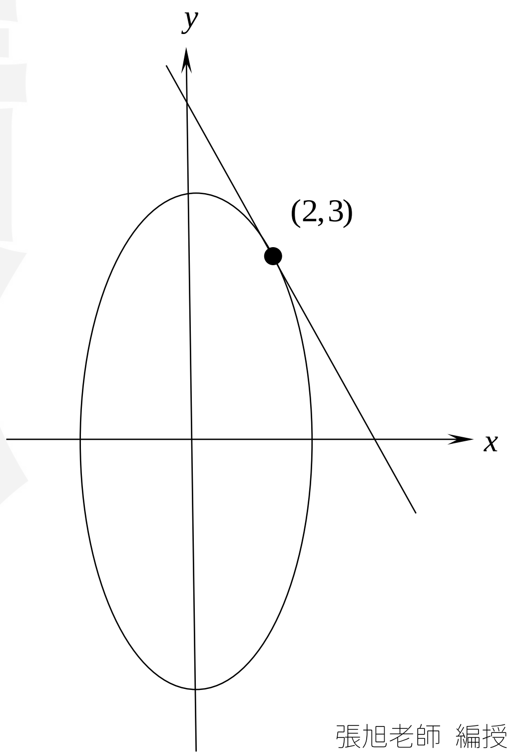
For $x^2+3xy-y^2+2x-y+1=0$, find $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

解

例題 3. (精選範例 6-2)

Let $\Gamma:\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{8}=1$, find the line which is tangent to Γ at $(2,3)$.

解



重點七 微分工具整合

求導函數四大工具：

(1) 微分表

(2) 微分運算律、微分合成律

(3) 反函數微分法、隱函數微分法

(4) 微分定義式

例題 1. (精選範例 7-1)
Differentiate the following functions.

(1) $f(x)=\cos|2x+5|$

(2) $f(x)=10^{\frac{1+x}{1-x}}$

解

例題 2. (精選範例 7-2)

(1) Assume that $y=\log_2 u$ and $u=3x^4+5$. Find $\dfrac{dy}{dx}$.

(2) If $y=\dfrac{u+2}{u-1}$, $u=(3s-1)^{\frac{2}{3}}$, and $s=\sqrt{t}$, then $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=9}=?$

解

例題 3. (精選範例 7-3)

Find $\dfrac{dy}{dx}$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ for the following equations.

(1) $x^2-xy+y^2=1$　　(2) $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{y}$　　(3) $\ln y=(2x+3)^x$

解

例題 4. (精選範例 7-4)

Let $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$.

(1) Calculate $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (2) Calculate $f'(0)$ (3) Find $f'(x)$

(4) Is $f'(x)$ continuous at $x=0$?

解

例題 5. (精選範例 7-5)

Let $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$. Find $f'(0)$.

解

重點八 切線專論

設 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，

則 $y=f(x)$ 圖形在 $(x_0, f(x_0))$ 之切線方程式爲：$\boxed{}$

說明

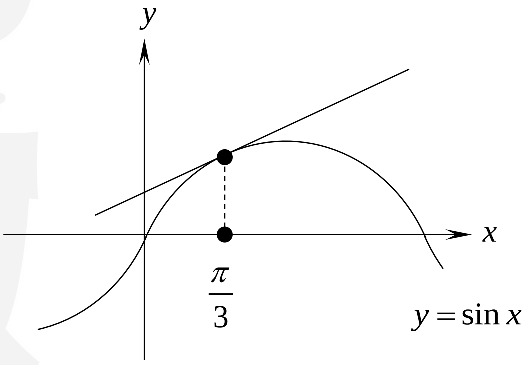
$\because$ 所求切線過 $(x_0, f(x_0))$ 且其斜率爲 ______

$\therefore$ 切線方程式爲 ____________________

例題 1.

Let $f(x)=\sin x$. Find the tangent line to $y=f(x)$ at $x=\dfrac{\pi}{3}$.

解



例題 2. (精選範例 8-1)

Let $f(x)=x^3+3x^2-4x-5$ and P is a point on the graph of $y=f(x)$. If the slope of the tangent line to the graph of $y=f(x)$ at P is 5, find P.

解

例題 3. (精選範例 8-2)

Suppose the tangent line to $f(x)=ax^3+bx^2+3$ at $x=-1$ is $y=3x+4$, find a and b.

解

例題 4. (精選範例 8-3)

Find all tangent lines to $f(x)=x^2+x+1$ passing through $(1,2)$.

解

例題 5. (精選範例 8-4)

Suppose that there exists two tangent lines to $f(x)=x^2-2x+2$ passing through *P*. If the slope of these two tangent lines are 6 and -2, find *P*.

解

例題 6. (精選範例 8-5)

If the tangent line to $f(x)=x^3+ax^2+bx-8$ at $(2,-10)$ has the smallest slope among all tangent lines, find *a* and *b*.

解

例題 7. (精選範例 8-6)

Find all intersections of $f(x) = x^3 - 4x + 1$ and its tangent line at $(1, -2)$.

解

YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

講義實體書販售中

張旭微積分下學期課程販售中

詳情請關注張旭老師各社群平台

或直接私訊張旭老師取得商店連結

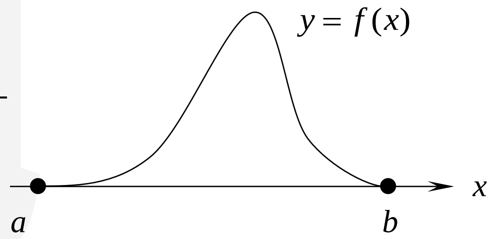
第四章 微分的應用

- 只有 exp(x) 能讓我微所欲微

重點一 均值定理

1. 洛爾均值定理：

設 $f(x)$ 為一個在 $[a,b]$ 上連續且在 (a,b) 上可微的函數，
若 $f(a)=f(b)=0$ ，
則 ______________________________________



說明

1° If $f(x)$ is constant on $[a,b]$, then done.

2° Suppose $f(x)$ is not constant on $[a,b]$.
W.L.O.G., may assume that $f(x)>0$ for some $x\in(a,b)$.

3° $\because$ $f(x)$ is continuous on $[a,b]$
$\therefore$ $\exists c\in[a,b]$ such that $f(c)\geq f(x)$ for all $x\in[a,b]$
$\because$ $f(x)>0$ for some $x\in(a,b)$
$\therefore$ $f(c)>0$
$\Rightarrow$ $c\in(a,b)$ and $f'(c)$ exists

4° Finally, since $f(c)$ is the maximum and $f'(c)$ exists,
we have $f'(c)=0$ [Q.E.D.]

2. 均值定理：

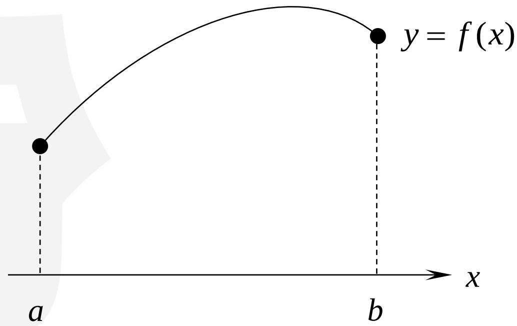
設 $f(x)$ 為一個在 $[a,b]$ 上連續且在 (a,b) 上可微的函數，
則存在 $c\in(a,b)$ 使得 $\boxed{}$

說明

Let $g(x)=f(x)-L(x)$,

where $L(x)=f(a)+\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$,

hen $\begin{cases} ① \ g(a)=g(b)=0 \\ ② \ g(x) \text{ is continuous on } [a,b] \\ ③ \ g(x) \text{ is differentiable on } (a,b) \end{cases}$



So, by Rolle's theorem,

$\exists c \in (a,b)$ such that $g'(c)=0$

$\Rightarrow \quad f'(c)-L'(c)=0$

$\Rightarrow \quad f'(c)=L'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ [Q.E.D.]

例題 1.

Let $f(x)=x^4-2x^2-8$, show that there exists $c\in[-2,2]$ such that $f'(c)=0$.

解

例題 2. (精選範例 1-1)

Suppose that $f(x)$ is differentaible on $(2,6)$ and continuous on $[2,6]$. Given that $1\le f'(x)\le 3$ for all x in $(2,6)$, show that $4\le f(6)-f(2)\le 12$.

解

例題 3. (精選範例 1-2)

Show that

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ for any $x,y\in\mathbb{R}$

(2) $|\sin x|\le|x|$ for any $x\in\mathbb{R}$

解

例題 4. (精選範例 1-3)

Let $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ be a noncontant polynomial. Show that between any two consecutive roots of the equation $P'(x)=0$ there is at most one root of the equation $P(x)=0$.

解

例題 5. (精選範例 1-4)

Prove that if $f(x)$ is differentaible on an interval I and $f'(x)<1$ for all $x \in I$, then there is at most one $c \in I$ such that $f(c)=c$.

解

例題 6. (精選範例 1-5) (Cauchy's mean-value theorem)

Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ both satisfy the hypothesis of the mean-value theorem. Prove that if $g'(x) \neq 0$ far all $x \in (a,b)$, then there exists at least one number $c \in (a,b)$ such that $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

解

重點二 微分與極限的聯手 (羅必達法則)

1. 羅必達法則：

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且在 (a,b) 上可微。

若 $\begin{cases} ① \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \\ ② \text{對任意 } x\in(a,b),\ x\neq x_0,\ \text{均有 } g'(x)\neq 0 \end{cases}$

則 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}= \qquad\qquad\qquad}$

說明

1° $\because$ $f(x)$ and $g(x)$ are both differentiable at $x=x_0$

$\therefore$ $f(x)$ and $g(x)$ are both continuous at $x=x_0$

$\Rightarrow$ $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ and $g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

2° For any $t\in(a,x_0)$,

since $\begin{cases} ① f(x) \text{ and } g(x) \text{ are continuous on } [t,x_0] \\ ② f(x) \text{ and } g(x) \text{ are differentiable on } (t,x_0) \end{cases}$

by Cauchy's mean-value theorem,

there exist $\xi\in(t,x_0)$ such that $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(t)-f(x_0)}{g(t)-g(x_0)}=\dfrac{f(t)}{g(t)}$

3° Letting $t\to x_0^-$,

then $\xi\to x_0^-$ and thus $\lim\limits_{t\to x_0^-}\dfrac{f(t)}{g(t)}=\lim\limits_{t\to x_0^-}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{t\to x_0^-}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$.

Thus $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4° Similarly, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

5° By 3° and 4°, we see that $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. [Q.E.D.]

2. 注意事項：

(1) 羅必達法則當 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ 時也可以使用！

(2) 羅必達法則當 $x_0=\infty$ 或 $x_0=-\infty$ 時也可以使用！

(3) 若使用羅必達法則以後還是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，可再使用一次羅必達法則！

例題 1.
Use L'Hopital's rule to find the following limits.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ (4) $\lim_{x\to \infty}\frac{1-\cos x}{x}$ (5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解

例題 2.
Find the following limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x - x}{x^3}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x-\tan^{-1}x}{x^3}$

解

例題 3.

Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$. Find $f'(0)$ and $f''(0)$.

解

重點三 極值分析相關名詞介紹

設 $f(x)$ 爲一在 $[a,b]$ 上的連續函數，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上找得到最大值與最小值。(參考**第二章連續之重點五**)

1. **絕對極值/全域極值：**

   (1) 絕對最大值：$f(x_0) \ge f(x)$ 對所有 x 都成立

   (2) 絕對最小值：$f(x_0) \le f(x)$ 對所有 x 都成立

2. **相對極值/局部極值：**

   (1) 相對最大值：$f(x_0) \ge f(x)$ 僅對 x_0 附近的 x 成立

   (2) 相對最小值：$f(x_0) \le f(x)$ 僅對 x_0 附近的 x 成立

3. **遞增、遞減：**

   (1) 遞增：只要 $x_1 < x_2$，就會 $f(x_1) \le f(x_2)$

   (2) 遞減：只要 $x_1 < x_2$，就會 $f(x_1) \ge f(x_2)$

   (3) 嚴格遞增：只要 $x_1 < x_2$，就會 $f(x_1) < f(x_2)$

   (4) 嚴格遞減：只要 $x_1 < x_2$，就會 $f(x_1) > f(x_2)$

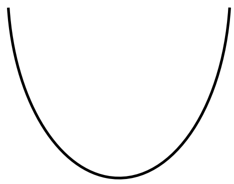
   (5) 單調函數：一直遞增或一直遞減的函數

4. **凹向上、凹向下、反曲點：**

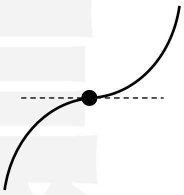
   (1) 凹向上：在一個區間上 $f'(x)$ 爲遞增，看下圖一

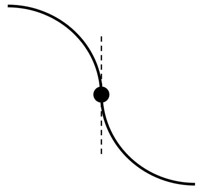
   (2) 凹向下：在一個區間上 $f'(x)$ 爲遞減，看下圖二

   (3) 反曲點：x_0 兩邊一邊凹向上一邊凹向下。看下圖三與圖四。

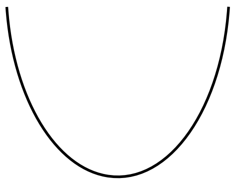

【圖一】

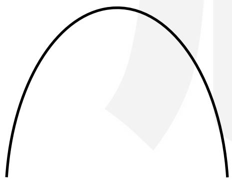

【圖二】

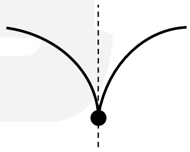

【圖三】

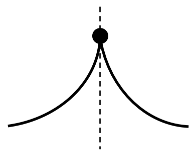

【圖四】

5. **臨界點：** x_0 使得 ________________ 或 ________________

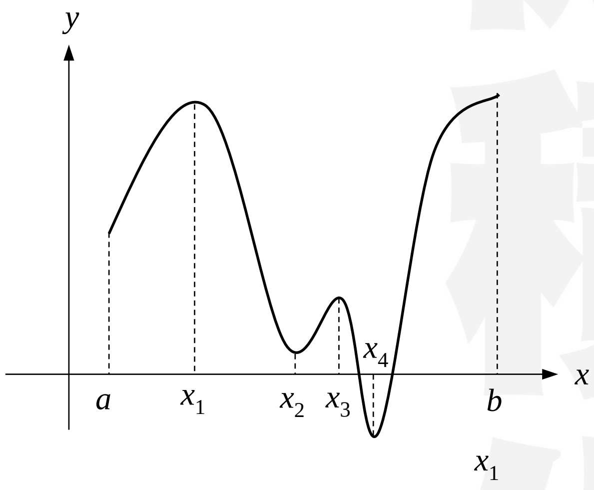

【圖五】


【圖六】


【圖七】


【圖八】

6. 請看圖完成表格：



① 相對最大值：________________
② 相對最小值：________________
③ 絕對最大值：________________
④ 絕對最小值：________________
⑤ 遞增區間：________________
⑥ 遞減區間：________________
⑦ 凹向上區間：________________
⑧ 凹向下區間：________________
⑨ 反曲點：________________
⑩ 臨界點：________________

重點四 微分求極值法

設 $f(x)$ 爲一在 (a,b) 上可微且在 $[a,b]$ 上連續的函數，$x_0 \in (a,b)$ 。

1. **遞增、遞減：**

(1) 對所有 $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ________________

(2) 對所有 $x \in (a,b)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ________________

說明

(1) For any $x_1, x_2 \in [a,b]$, W.L.O.G., may assume $x_1 < x_2$

By M.V.T., $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$ for some $c \in (x_1, x_2)$

By assumption, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ and thus $f(x_1) < f(x_2)$

Thus $f(x)$ increases strictly on (a,b).

(2) Similar to (1). [Q.E.D.]

2. **凹上、凹下：** (此處假設 $f(x)$ 二次可微)

(1) 對所有 $x \in (a,b)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ________________

(2) 對所有 $x \in (a,b)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ________________

說明

(1) By assumption, we have $f'(x)$ increase strictly on $[a,b]$

Thus $f(x)$ is concave up on $[a,b]$.

(2) Similar to (1). [Q.E.D.]

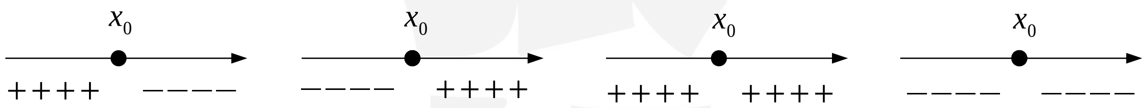
3. **一次微分檢驗法：**

(1) 若在 x_0 左邊都滿足 $f'(x) > 0$ 且在 x_0 右邊都滿足 $f'(x) < 0$，

則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 ________________

(2) 若在 x_0 左邊都滿足 $f'(x)<0$ 且在 x_0 右邊都滿足 $f'(x)>0$，

則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 ______________



4. **二次微分檢驗法：**

假設 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)$ 存在

(1) 若 $f''(x_0)>0$，則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 ______________

(2) 若 $f''(x_0)<0$，則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 ______________

記憶

5. 注意事項：

(1) 拿到題目都先解 ________ 或 ________ 找臨界點 (極值候選人)

(2) 判斷最大最小值時優先使用 ____________，若不行再使用 ____________

(3) 兩種檢驗法只能找出在 (a,b) 上的 ___________

(4) 欲求絕對極值，需將檢驗法所得到的相對極值和兩端點的函數值 (也就是 $f(a)$ 和 $f(b)$) 比大小。其中最大就是 __________，其中最小就是 __________

(5) 若 $f(x)$ 並沒有在 (a,b) 上到處可微的話，極值候選人可能會增加：

$f(x_0)$ 是一個相對極值 $\Rightarrow$ ______________________

例題 1.

For the following functions, find all extrema:

(1) $f(x)=3x^2-x+7$

(2) $f(x)=\left|x^2-1\right|$

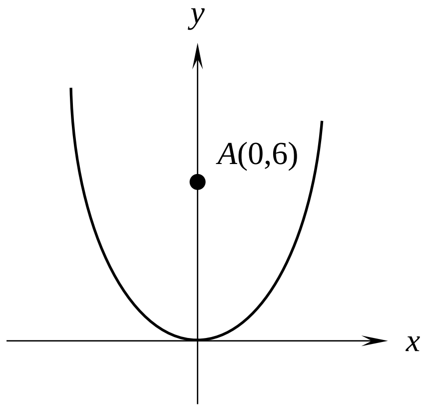
(3) $f(x)=3x^2-x+7$ on $[-1,2]$

(4) $f(x)=2\sin x+\cos x$ on $[0,2\pi]$

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Find the point(s) on the parabola $y=\frac{1}{8}x^2$ closet to the point $A(0,6)$.

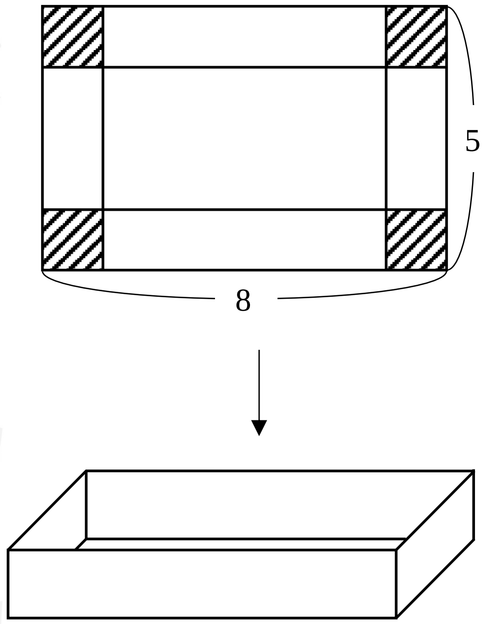


解

例題 3. (精選範例 4-2)

A box without a top is to be made by cutting small squares, of equal size from the corners of an 8×5 inch piece of card and then tuning up the sides. Find the maximum possible volume for the box.

解



例題 4. (精選範例 4-3)

(1) Suppose $f'(x_0)=0$, must $f(x_0)$ be a local extrema?

(2) Suppose $f(x)$ increases on (a,x_0) and decrease on (x_0,b), must $f(x_0)$ be a local extrema?

(3) Suppose $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, must $(x_0, f(x_0))$ be a point of inflection?

(4) Suppose $(x_0, f(x_0))$ is a point of inflection, must $f''(x_0)$ be 0?

解

重點五 漸近線

◎ 關於漸近線：

(1) 若 __________ 或 __________，則 $y=K$ 是 $y=f(x)$ 圖形的一條**水平漸近線**

(2) 若 __________ 或 __________ 或 __________ 或 __________，

則 $x=H$ 是 $y=f(x)$ 圖形的一條**鉛直漸近線**

(3) 設 $L(x)=ax+b$，若 ______________ 或 ______________，

則 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 圖形的一條**斜漸近線**

其中 $\begin{cases} a= \underline{\qquad\qquad} \\ \text{利用 } \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{ 可得 } b \end{cases}$

$\boxed{\text{說明}}$

$$\because \lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

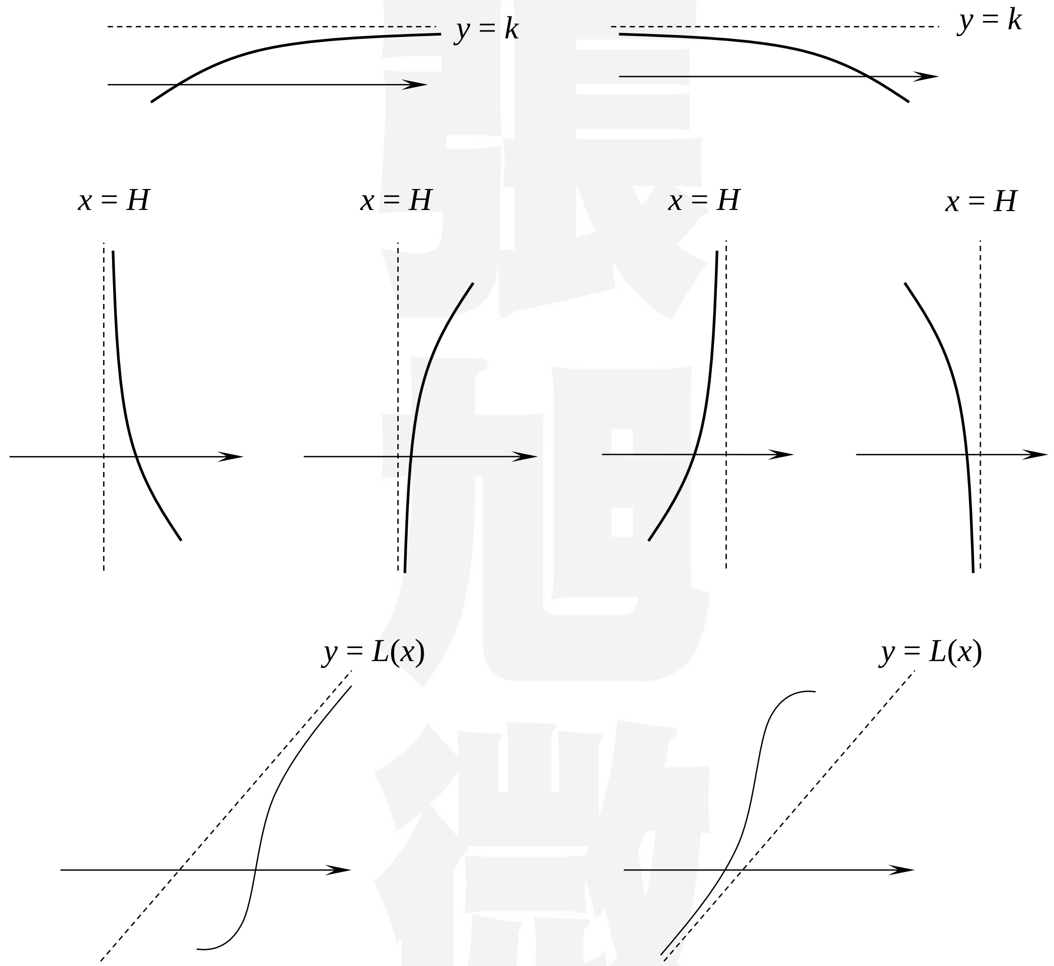
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}]=0$$

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-a]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{[Q.E.D.]}$$



例題 1. (精選範例 5-1)

Find all vertical asymptotes of $y=\dfrac{x^2+4}{x-3}$

解

例題 2. (精選範例 5-2)

Find all horizontal asymptotes of $y=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$

解

例題 3. (精選範例 5-3)

Find all asymptotes of $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

解

重點六 微分作圖法

1. 利用極限及微分的技術可畫出函數圖形的約略長相。

2. 微分作圖法步驟：

   1° 判斷 __________ 和是否爲**奇偶函數**

   2° 求與軸的 __________

   3° 找出所有 __________

   4° 一次微分找出**遞增、遞減**的範圍，並找出 _________

   5° __________ 判斷臨界點的函數值是局部極大、極小還是反曲點

例題 1.

Sketch the graph of $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

解

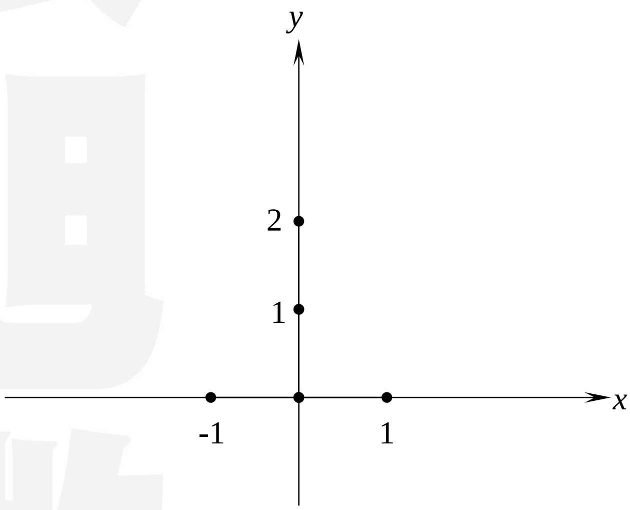
1° $\mathrm{Dom}(f)=$

Odd function or even funcion?

Intersections：

Asymtotes：

$f'(x)=$



$f''(x)=$

例題 2. (精選範例 6-1)

Sketch the graph of Sketch the graph of $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

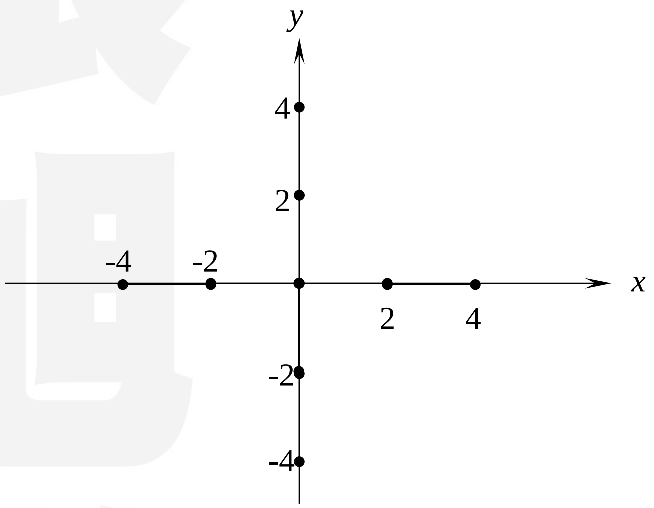
解

1° $\text{Dom}(f)=$

Odd function or even funcion?

Intersections：

Asymtotes：



$f'(x)=$

$f''(x)=$

重點七 微分量

1. 設 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微分，

   則 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 的切線為 $\boxed{}$

2. 令 $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

   則 $L(x)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的線性化函數，

   且此時在 $x=x_0$ 附近 $L(x)\approx f(x)$

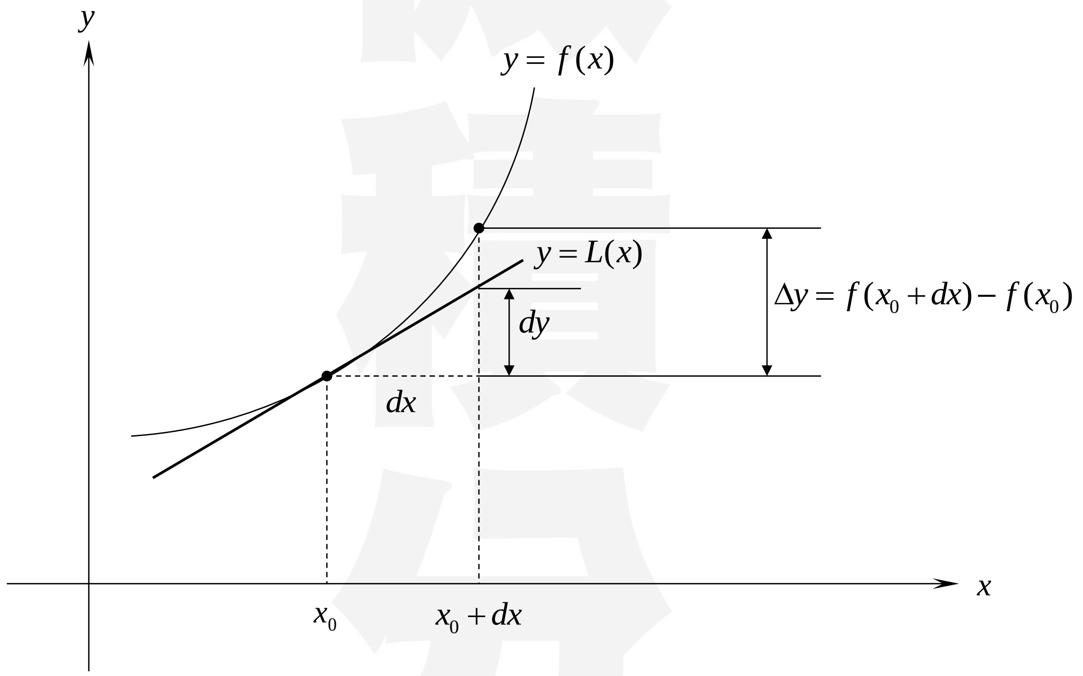
3. 令 $f(x)$ 為一可微分函數，

   (1) dx 是一個 ____________，表示 x 方向的微小變化量

   (2) $dy=$__________，表示 $L(x)$ 在 y 方向隨 dx 而變的微小變化量

   (3) dx 和 dy 都可稱為 $f(x)$ 的**微分量**

   (4) dy 可用來**估計** $f(x)$ 的微小變化量



例題 1.
Find the linearization $L(x)$ of the given function $f(x)$ at $x = x_0$

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, $x_0 = -4$　　(2) $f(x) = \tan x$, $x_0 = \pi$

解

例題 2. (精選範例 7-1)

Show that the linearization of $f(x)=(1+x)^k$ at $x=0$ is $L(x)=1+kx$.

解

例題 3. (精選範例 7-2)

Estimate the following.

(1) $(1.0002)^{100}$ (2) $\sqrt[7]{1.0007}$

解

例題 4. (精選範例 7-3)

Estimate the change in the volume $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ of a sphere when the radius changes from r_0 to r_0+dr.

解

例題 5. (精選範例 7-4)
The radius of a circle is increased from 2 to 2.02 m.
(1) Estimate the resulting change in area.
(2) Express he estimate as a percentage of the circle's original area.

解

重點八 牛頓法

1. 我們都知道 $\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$，但 $\sqrt{2}$ 只是一種表示法；我們也知道 $\sqrt{2}\approx 1.414...$，但如何得到更精準一點的答案呢，牛頓法提供我們一種演算方式。

2. **牛頓法**解 $x^2-2=0$：

   1° 取 $x_0=1$，造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_0=1$ 的切線 $y=L_1(x)=2x-3$

   2° 解 $y=L_1(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_1=\dfrac{3}{2}=1.5$，

   造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_1=\dfrac{3}{2}$ 的切線 $y=L_2(x)=3x-\dfrac{17}{4}$

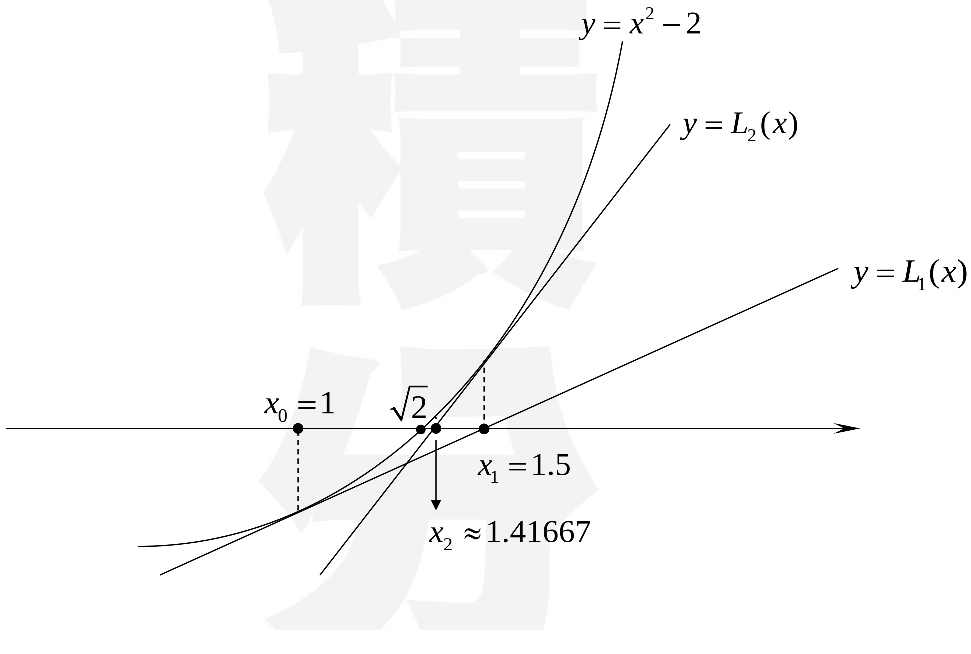
   3° 解 $y=L_2(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_2=\dfrac{17}{12}\approx 1.41667$，

   造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_2=\dfrac{17}{12}$ 的切線 $y=L_3(x)=\dfrac{17}{6}x-\dfrac{577}{144}$

   4° 解 $y=L_3(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_3=\dfrac{1731}{1224}\approx 1.41422$，

   造一條⋯

   重複此動作，則可得一數列 $\{x_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$



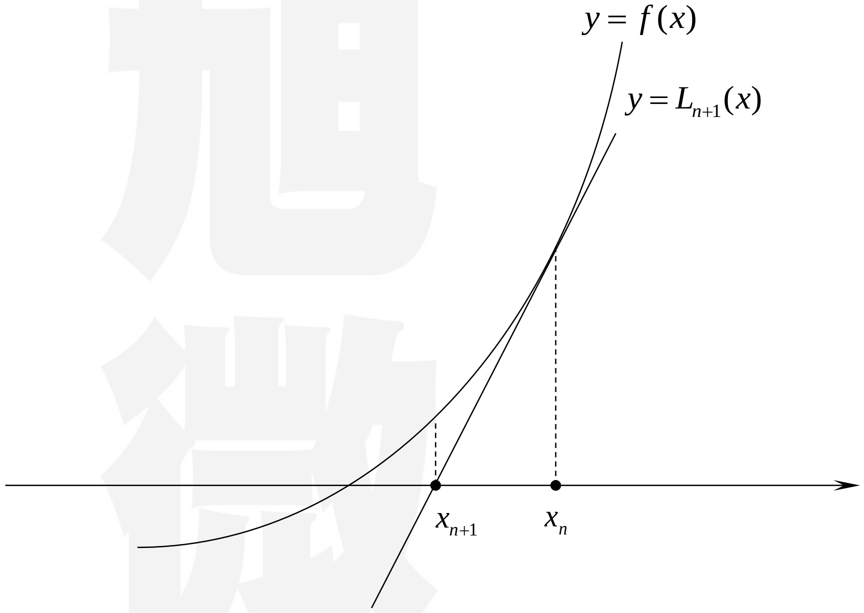
3. **牛頓法公式：**

1° 定一個恰當的起始點 x_0

2° 利用 $\boxed{x_{n+1} = \quad\quad\quad}$ 造出一數列 $\{x_n\}$，

則此數列可能會收斂至 $f(x)=0$ 之根

說明



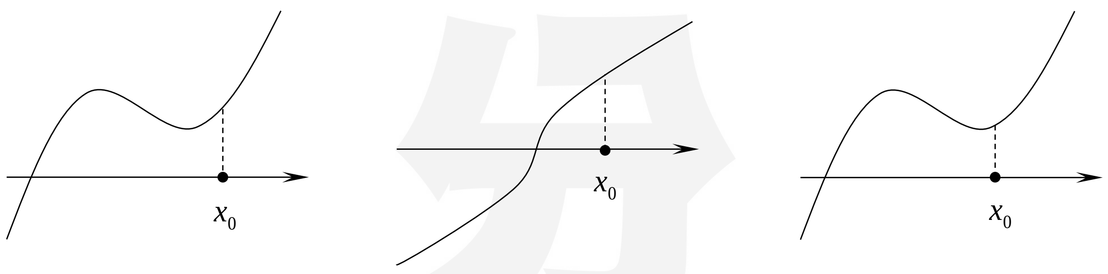
4. **牛頓法公式可能失效：**

起始點取的不好，導致數列

(1) 離根越來越遠

(2) 在幾個點上周期性地移動

(3) 某個 x_n 使 $f'(x_n)=0$ 以致於得不到 x_{n+1}



例題 1.

Use Newton's method to estimate the solutions of the equation $x^2+x-1=0$ by starting with $x_0=-1$.

解

例題 2. (精選範例 8-1)

Use Newton's method to find two real solutions of the equation $x^4-2x^3-x^2-2x+2=0$.

解

例題 3. (精選範例 8-2)

Estimate π by applying Newton's method to solve the equation $\tan x = 0$ with $x_0 = 3$.

解

例題 4. (精選範例 8-3)

Estimate $\sqrt{3}$ to five decimals.

解

YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

講義實體書販售中

張旭微積分下學期課程販售中

詳情請關注張旭老師各社群平台

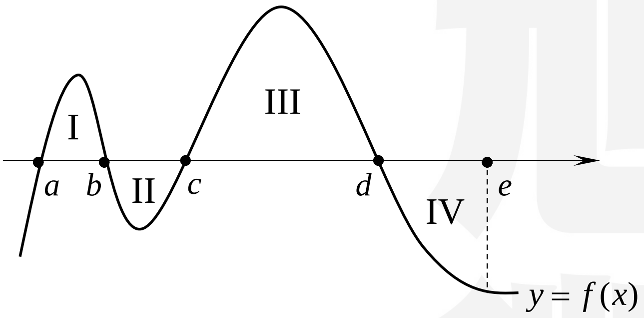
或直接私訊張旭老師取得商店連結

第五章 積分(前篇)

- 如果可以回到那天 我希望能+C

重點一 定積分直觀觀念

1. 給定一個函數 $y = f(x)$，我們用 ________ 表示此函數在 $[a,b]$ 上與 x 軸所圍成的**有向面積**。



(1) $\int_a^e f(x)dx =$ ________

(2) $\int_b^d f(x)dx =$ ________

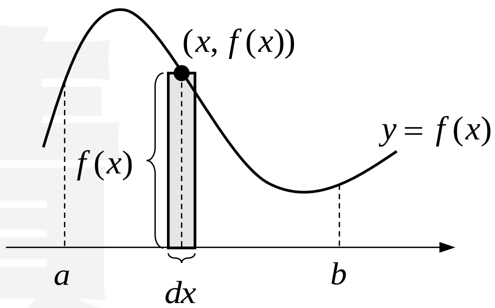
(3) $\mathrm{II} =$ ________

(4) $\mathrm{I} + \mathrm{IV} =$ ________

2. $\int_a^b f(x)dx$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ________

3. 定積分符號直觀看法：

$$\int_a^b f(x)dx$$

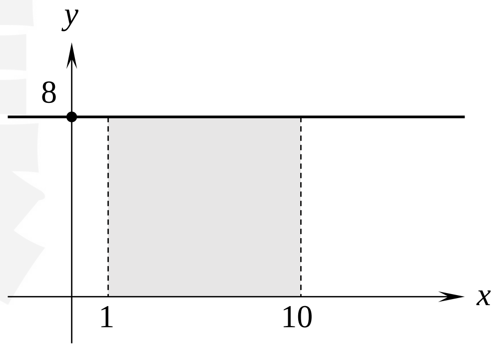


4. 可微必連續，**連續必可積**！

例題 1.

$\int_{1}^{10} 8dx = ?$

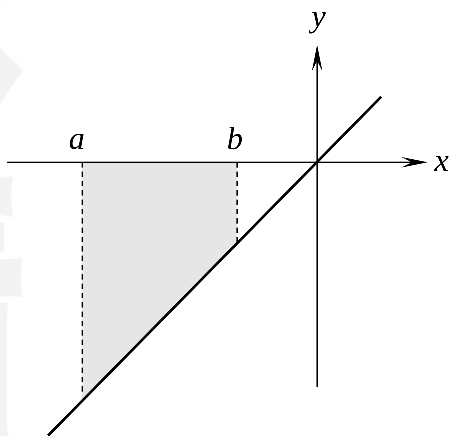
解



例題 2.

$\int_{a}^{b} xdx = ?$ （$a < b \le 0$）

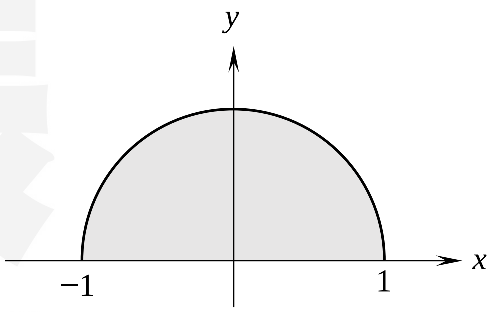
解



例題 3.

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=?$

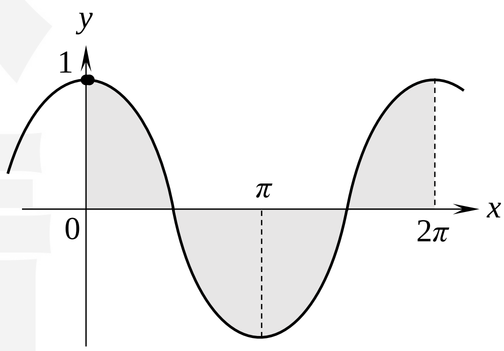
解



例題 4.

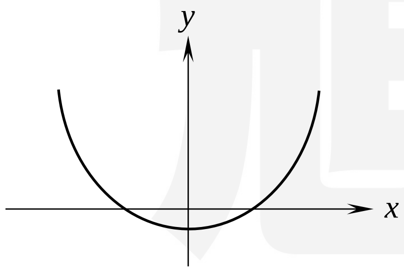
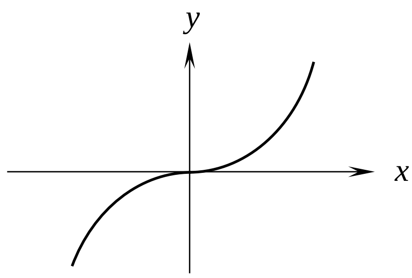
$\int_{0}^{2\pi}\cos x\,dx=?$

解



重點二 奇偶函數的積分

◎ 奇偶函數分析：

	偶函數	奇函數
定義	$f(-x)=$	$f(-x)=$
特色	吸收負號	吐出負號
口訣		
圖形		
對稱性	對稱 y 軸	對稱原點
關於原點	無關	必過原點
定積分值	$\int_{-a}^{a} f(x)dx =$	$\int_{-a}^{a} f(x)dx =$

例題 1.

(1) $\int_{-2}^{2} x^3 dx = ?$　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = ?$　　(3) $\int_{-1}^{1} |x| dx = ?$

解

例題 2. (精選範例 2-1)

True or false:

(1) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+1}dx = 0$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x + 1dx = 2\int_{-\pi}^{0} \cos x + 1dx$

(3) $\int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_{0}^{1} |x| dx$

解

重點三 定積分正式定義

1. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上片段連續，

   令 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上的一組分割，

   且對任意 $1\le k\le n$，再令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，則：

   (1) 令 $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$，$1\le k\le n$，

   則 $R_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

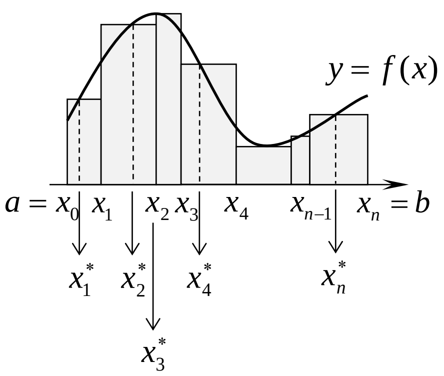
   (2) 令 $M_k=\max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$，$1\le k\le n$，

   則 $U_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

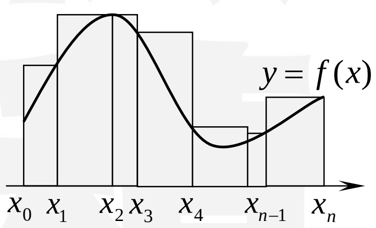
   (3) 令 $m_k=\min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$，$1\le k\le n$，

   則 $L_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

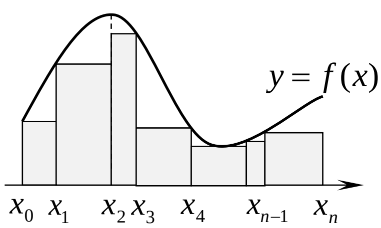
[圖一] 黎曼和



[圖二] 上和



[圖三] 下和



2. 上和 v.s. 下和 v.s. 黎曼和 v.s. $\int_a^b f(x)dx$

   (1) $L_{f,[a,b]}$ ___ $R_{f,[a,b]}$ ___ $U_{f,[a,b]}$

   (2) $L_{f,[a,b]}$ ___ $\int_a^b f(x)dx$ ___ $U_{f,[a,b]}$

(3) 當分割點越來越多時，$L_{f,[a,b]}$ ______ 而 $U_{f,[a,b]}$ ______

(4) 不斷新增分割點使 $\Delta x_k \to 0$，

若 $L_{f,[a,b]}$ 和 $U_{f,[a,b]}$ 趨近同一值 A，

則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是 ____________，並定義 $\int_a^b f(x)dx =$______

3. **關於新增分割點**：

(1) 若 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 為 $[a,b]$ 上的一組分割，

則可用數列 $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 來表示這組分割，

此時我們可以把上和、下和和黎曼和的符號寫得更清楚一些：

① $U_{f,[a,b]} = U_{f,[a,b],P}$

② $L_{f,[a,b]} = L_{f,[a,b],P}$

③ $R_{f,[a,b]} = R_{f,[a,b],P}$

(2) 若 P_1 和 P_2 均為 $[a,b]$ 上的一組分割且 $P_1 \subseteq P_2$，

則表示 P_2 為 P_1 新增了一些分割點後所形成的分割，此時：

① $L_{f,[a,b],P_1}$ ___ $L_{f,[a,b],P_2}$

② $U_{f,[a,b],P_1}$ ___ $U_{f,[a,b],P_2}$

(3) 令 $\|P\| = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$，

則 $\|P\| \to 0$ 的意思是在 P 中不斷新增分割點使得 $\|P\|$ 遞減至 0

(4) 運用以上符號，則可將 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可積分的定義重寫如下：

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上片段連續且 P 是 $[a,b]$ 上的分割，

若 ____，

則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是可積分的，並定義 $\int_a^b f(x)dx = A$

例題 1.

Show that $\int_a^b dx = b - a$ with $a < b$ by definition.

解

例題 2. (精選範例 3-1)

Find $\int_0^1 x dx$ by defintion.

解

例題 3. (精選範例 3-2)

Let $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, show that $f(x)$ is not integrable over $[0,1]$.

解

重點四 積分運算性質

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是在 $[a,b]$ 上可積的函數，且 $c\in\mathbb{R}$ 爲一常數。

1. 四則運算篇：

(1) $\int_a^b c\cdot f(x)dx=$ ____________

(2) $\int_a^b f(x)+g(x)dx=$ ____________

(3) $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=$ ____________

(4) $\int_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}dx=$ ____________

$\boxed{\text{說明}}$

(1) Let P be a partition of $[a,b]$,

$\because$ $f(x)$ is continuous on $[a,b]$

$\therefore$ $f(x)$ is integrable on $[a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{\|P\|\to 0}U_{f,[a,b],P}=\lim_{\|P\|\to 0}L_{f,[a,b],P}=A=\int_a^b f(x)dx\in\mathbb{R}$$

$$\because \lim_{\|P\|\to 0}U_{cf,[a,b],P}=\lim_{\|P\|\to 0}\sum cM_k\Delta x_k=c\lim_{\|P\|\to 0}\sum M_k\Delta x_k=c\lim_{\|P\|\to 0}U_{f,[a,b],P}=cA$$

$$\text{and } \lim_{\|P\|\to 0}L_{cf,[a,b],P}=\lim_{\|P\|\to 0}\sum cm_k\Delta x_k=c\lim_{\|P\|\to 0}\sum m_k\Delta x_k=c\lim_{\|P\|\to 0}L_{f,[a,b],P}=cA$$

$$\therefore \int_a^b c\cdot f(x)dx=cA=c\int_a^b f(x)dx$$

(2) $\because$ $\lim_{\|P\|\to 0}U_{f+g,[a,b],P}=$

and $\lim_{\|P\|\to 0}L_{f+g,[a,b],P}=$

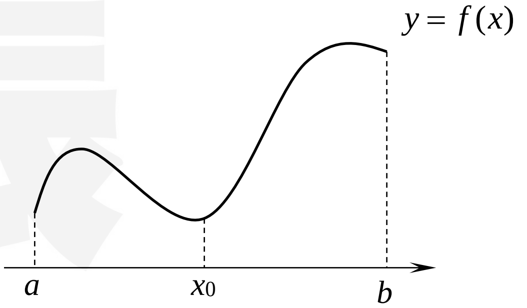
$\therefore$ $\int_a^b f(x)+g(x)dx=$

2. 看圖說**等式**篇： (此處 $x_0 \in [a,b]$)

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx +$ ________

(2) $\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx =$ ________

(3) $\int_a^b f(x)dx =$ ________

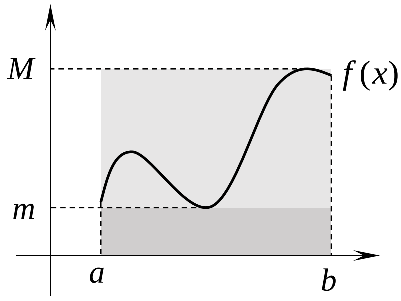


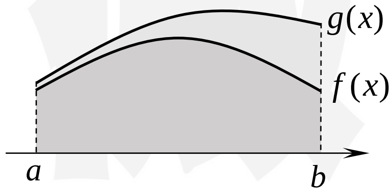
3. 看圖說**不等式**篇：

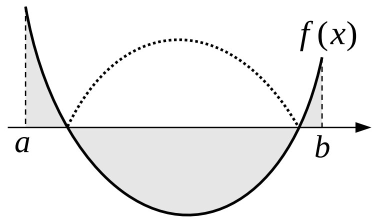
(1) 若 $m \le f(x) \le M$，則 ________ $\le \int_a^b f(x)dx \le$ ________

(2) 若 $f(x) \le g(x)$，則 $\int_a^b f(x)dx$ ____ $\int_a^b g(x)dx$

(3) 若 $a \le b$，則 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ ____ $\int_a^b |f(x)|dx$







例題 1.

(1) $\int_a^b 2xdx = ?$ (2) $\int_a^b 2x+5dx = ?$

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Suppose that $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_2^5 f(x)dx = 7$, $\int_2^3 f(x)dx = 2$, and $\int_4^5 f(x)dx = -1$.
Evaluate the following integrals:

(1) $\int_1^5 f(x)dx$ (2) $\int_4^2 f(x)dx$ (3) $\int_2^5 f(x)dx$

解

例題 3. (精選範例 4-2)

Show that $\int_0^1 x^n dx \le \dfrac{1}{2}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

解

例題 4. (精選範例 4-3)
Let $f(x)$ be continuous on $[a,b]$, show that there is a number $c\in[a,b]$ such that $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot h$.
解

重點五 微積分基本定理 I - 先微再積型

設 $f(x)$ 爲一在 $[a,b]$ 上可積的函數。

1. 若在 (a,b) 上都滿足 $F'(x)=f(x)$，

   則 $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\quad}$

   說明

2. 滿足 $F'(x)=f(x)$ 的 $F(x)$，俺稱之爲 $f(x)$ 的 ________

例題 1.

(1) $\int_a^b 2xdx=?$ (2) $\int_a^b 2x+5dx=?$

解

例題 2. (精選範例 5-1)

Evaluate the following integrals. ($p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 1$)

(1) $\int_a^b x^2 dx$ (2) $\int_a^b x^3 dx$ (3) $\int_a^b \sqrt[3]{x} dx$ (4) $\int_a^b x^p dx$

解

例題 3. (精選範例 5-2)
Evaluate the following integrals.

(1) $\int_0^{\pi} \sin x dx$　(2) $\int_0^{\pi} \cos x dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$

解

例題 4. (精選範例 5-3)

Evaluate the following integrals.

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\int_{1}^{2}\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx$

解

例題 5. (精選範例 5-4)
Evaluate the following integrals.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$ (3) $\int_0^1 2^x \ln 2dx$ (4) $\int_0^1 3^x dx$

解

重點六 不定積分與反導數

1. 令 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的反導函數，則：

   (1) $(F(x)+c)'=$ ________

   (2) 若 $G'(x)=f(x)$，則 $G(x)=$ ____________

2. 因爲反導函數不唯一，所以爲求方便起見我們用 ______________ 來表示任何一個對於 $f(x)$ 的反導函數。

3. 對於給定的函數 $f(x)$ 而言，因爲反導函數之間差一個常數，所以若已找到一個反導函數 $F(x)$，則：

$$\boxed{\int f(x)dx = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

4. $\int f(x)dx$ 稱爲 $f(x)$ 的 ______________

例題 1.
Find the following integrals.

(1) $\int 5dx$　　(2) $\int dx$　　(3) $\int x^3+\sqrt{x}dx$　　(4) $\int x^p dx$

解

例題 2. (精選範例 6-1)
Find the following integrals.

(1) $\int \frac{x}{|x|} dx$ (2) $\int \frac{4x+6}{|2x+3|} dx$ (3) $\int \frac{x^3+x}{|x^2+1|} dx$

解

例題 3. (精選範例 6-2)
Find the following integrals.

(1) $\int \sin x dx$ (2) $\int \cos x dx$ (3) $\int \sec^2 x dx$ (4) $\int \sec x \tan x dx$

解

例題 4. (精選範例 6-3)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx$

解

例題 5. (精選範例 6-4)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{1}{x} dx$ (2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ (3) $\int 2^x \ln 2 dx$ (4) $\int 3^x dx$

解

重點七 雙曲函數

1. 由尤拉公式：$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

可得：$\begin{cases} \sin x = \\ \cos x = \end{cases}$

2. 定義 $\begin{cases} \sinh x = \\ \cosh x = \end{cases}$

且 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ 、 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ 、 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$ 、 $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}$ ，

以上六種函數稱爲雙曲函數

3. 雙曲函數在其定義域上處處連續且可微

例題 1.
Differentiate the following functions:
(1) $\sinh x$ (2) $\cosh x$ (3) $\tanh x$

解

例題 2. (精選範例 7-1)

Find: (1) $\sinh^{-1} x$ (2) $\cosh^{-1} x$ (3) $\tanh^{-1} x$, then differentiate them.

解

重點八 微分表 II

冪函數與絕對值微分	
$(c)'=0 \qquad (c\in\mathbb{R})$	$(x^{p})'=px^{p-1} \qquad (p\in\mathbb{R}\ ,\ p\neq 0)$
$\lvert x\rvert'=\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	$\lvert f(x)\rvert'=\dfrac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert}\cdot f'(x)$
三角函數微分	
$(\sin x)'=\cos x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\sec x)'=\sec x\tan x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\cot^2 x$
反三角函數微分	
$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\csc^{-1}x)'=\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$(\cos^{-1}x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\sec^{-1}x)'=\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\cot^{-1}x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$
指對數函數微分	
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(e^{x})'=e^{x}$
$(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$(e^{f(x)})'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(a^{x})'=a^{x}\ln a$
$(\log_a f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$	$(a^{f(x)})'=a^{f(x)}(\ln a)f'(x)$

雙曲函數微分	
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$	$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$
反雙曲函數微分	
$(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(\operatorname{csch}^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}} \quad (x \neq 0)$
$(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1)$	$(\operatorname{sech}^{-1} x)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0<x<1)$
$(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x\rvert<1)$	$(\coth^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x\rvert>1)$

重點九 四大積分基本方法之一：變數變換法

1. 將被積分的函數中的一部分打包起來，有機會能降低積分難度。

$\boxed{\text{說例}}$ $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

令 $u=x^2+1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx}= \qquad \Rightarrow du=$

則 $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx=$

2. 打包的部分 $u=u(x)$ 時，若出現 $u'(x)dx$ 的話，則積分成功率上升！

3. 定積分在做變數變換時，需注意積分範圍！

$\boxed{\text{說例}}$ $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

令 $u=x^2+1 \Rightarrow \begin{cases} du= \\ x=0 \Rightarrow u= \\ x=1 \Rightarrow u= \end{cases}$

則 $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx=$

4. 公式：

(1) 不定積分版：$\int f(g(x))g'(x)dx=$ ________________

(2) 定積分版：$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=$ ________________

例題 1. (精選範例 9-1)

Find the following integrals.

(1) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$ (2) $\int x\sqrt{x+4}dx$ (3) $\int x^2\sqrt{x-1}dx$

解

例題 2. (精選範例 9-2)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ (2) $\int \tan x dx$ (3) $\int \sec x dx$

解

例題 3. (精選範例 9-3)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{e^x}{5+e^x}dx$ (2) $\int x^2 e^{x^3+1}dx$ (3) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

解

例題 4. (精選範例 9-4)

Find the following definite integrals.

(1) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx$ (3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

解

重點十 四大積分基本方法之二：三角置換法

1. 三角置換法是變數變換法的一種，此方法不將被積函數中的部分打包成 $u=u(x)$，而是將 x 令成 $\sin u$、$\sec u$ 或 $\tan u$。

2. 三角置換法令 x 法則：

 (1) 遇 $\sqrt{a^2-x^2}$ $\Rightarrow$ 令 $x=$ ____________

 (2) 遇 $\sqrt{x^2-a^2}$ $\Rightarrow$ 令 $x=$ ____________

 (3) 遇 a^2+x^2 $\Rightarrow$ 令 $x=$ ____________

3. 三角置換法令完 x 以後馬上進行兩個動作：

 (1) ____________________

 (2) 將原式變數變換

說例 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin u \Rightarrow dx=$

則 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

例題 1. (精選範例 10-1)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (2) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-3}}\,dx$

解

例題 2. (精選範例 10-2)

Find the following integrals.

(1) $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$ (2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$ (3) $\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$

解

例題 3. (精選範例 10-3)

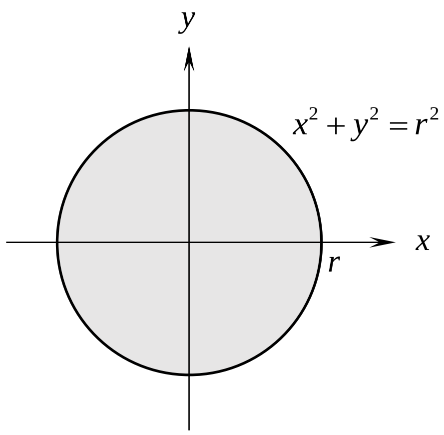
Calculate $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3\sqrt{x^2+1}dx$.

解

例題 4. (精選範例 10-4)

Evaluate the area of a disk of radius $r>0$.

解



重點十一 四大積分基本方法之三：分部積分法

1. 遇到 $\int f(x)g(x)dx$ 時，可試著用分部積分法來對付之。

2. 令 $F'(x)=f(x)$ 且 $G'(x)=g(x)$，則：

   (1) $\int F(x)g(x)dx=$ ________________________

   (2) $\int_a^b F(x)g(x)dx=$ ________________________

   證明

   $\because\ (F(x)G(x))'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=f(x)G(x)+F(x)g(x)$

   $\therefore\ F(x)G(x)=\int f(x)G(x)+F(x)g(x)dx=\int f(x)G(x)dx+\int F(x)g(x)dx$

   故 $\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x)-\int f(x)G(x)dx$ [Q.E.D.]

3. 分部積分公式的另一種寫法：

   (1) $\int udv=uv-\int vdu$

   (2) $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

例題 1.
Calculate $\int xe^x dx$ and $\int x^2 e^x dx$.
解

例題 2. (精選範例 11-1)

Calculate $\int x\ln x dx$ and $\int \ln x dx$.

解

例題 3. (精選範例 11-2)

Calculate $\int e^x \sin x dx$ and $\int e^x \cosh x dx$.

解

例題 4. (精選範例 11-3)

Calculate $\int \sin^{-1} x dx$ and $\int \tan^{-1} x dx$.

解

例題 5. (精選範例 11-4)

Calculate $\int \sec x dx, \int \sec^2 x dx$ and $\int \sec^3 x dx$.

解

例題 6. (精選範例 11-5)

Show that $\int \sec^{n+2} x dx = \frac{1}{n+1}\sec^n x \tan x + \frac{n}{1+n}\int \sec^n x dx$ holds true for all nonnegative integer n.

解

例題 7. (精選範例 11-6)

Show that $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$ and conclude that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{, if } n \text{ is an even integer } \geq 2 \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n} & \text{, if } n \text{ is an odd integer } \geq 3 \end{cases}$$

解

例題 8. (精選範例 11-7)

Calculate $\int_a^b |x|\,dx$.

解

例題 9. (精選範例 11-8)

Calculate $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

解

重點十二 積分表

從微分表而來	利用積分方法補完
	$\int c\,dx = cx + C$
$\int px^{p-1}dx = x^p + C$ （$p \neq 0$）	$\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$ （$p \neq -1$）
$\int \dfrac{x}{\lvert x\rvert}dx = \lvert x\rvert + C$	$\int \lvert x\rvert dx = \dfrac{x\lvert x\rvert}{2} + C$
$\int \dfrac{f(x)f'(x)}{\lvert f(x)\rvert}dx = \ln f(x) + C$	$\int \lvert f(x)\rvert f'(x)dx = \dfrac{\lvert f(x)\rvert f(x)}{2} + C$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$
$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \sin^n x\,dx = -\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \cos^n x\,dx = \dfrac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + c$	$\int \csc x\,dx = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + c$
	$\int \sec^3 x\,dx = \dfrac{1}{2}\sec x\tan x + \dfrac{1}{2}\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$

從微分表而來	利用積分方法補完
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\frac{x}{a}) + C$
$\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + C$	$\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{x}{a}) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + \mathrm{C}$
	$\int \sin^{-1}xdx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$
	$\int \cos^{-1}xdx = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$
	$\int \tan^{-1}xdx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$

重點十三 四大積分基本方法之四：部分分式法

1. 遇到 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ($P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多項式) 時，可試著用部分分式法來對付之。

2. 處理步驟：

1°先用除法將 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 寫成 $A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ 的形式，

其中 $A(x)$ 和 $R(x)$ 分別爲 $P(x)\div Q(x)$ 的商式和餘式。

2°則 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int A(x)dx+\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ 。$\int A(x)dx$ 可直接積分。

3°利用因式分解將 $\frac{R(x)}{Q(x)}$ 寫成 $\frac{R(x)}{[Q_1(x)]^{p_1}[Q_2(x)]^{p_2}\cdots[Q_n(x)]^{p_n}}$ ，

其中每一個 $Q_k(x)$ 都是一次式或是二次式。

然後再將之強迫分解成 $\sum_{k=1}^{p_1}\frac{A_{1,k}(x)}{[Q_{1,k}(x)]^k}+\sum_{k=1}^{p_2}\frac{A_{2,k}(x)}{[Q_{2,k}(x)]^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{A_{n,k}(x)}{[Q_{n,k}(x)]^k}$ ，

其中 $\deg A_k(x)=\deg Q_k(x)-1$ 。

4°則 $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx=\sum_{k=1}^{p_1}\int \frac{A_{1,k}(x)}{[Q_{1,k}(x)]^k}dx+\sum_{k=1}^{p_2}\int \frac{A_{2,k}(x)}{[Q_{2,k}(x)]^k}dx+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\int \frac{A_{n,k}(x)}{[Q_{n,k}(x)]^k}dx$ 。

例題 1.

Calculate $\int \frac{2x}{x^2 - x - 2} dx$.

解

例題 2. (精選範例 13-1)

Calculate $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx$.

解

例題 3. (精選範例 13-2)

Calculate $\int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

解

例題 4. (精選範例 13-3)

Calculate $\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x+1)(x^2+4)^2} dx$.

解

例題 5. (精選範例 13-4)

Calculate $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx$.

解

YT、FB、IG

一致搜尋：數學老師張旭

第六章 積分(後篇)

- 積分進階計算工具與一些求體積的應用

重點一 進階積分技巧：高次倍角三角函數積分

1. **高次三角函數積分** (此處 m 和 n 均爲非負整數)

(1) $\int \sin^m x\cos^n xdx$ 型

① m 爲奇數 $\Rightarrow$ $\sin^m x=\sin^{2k+1}x=(\sin^2 x)^k\sin x=(1-\cos^2 x)^k\sin x$

② n 爲奇數 $\Rightarrow$ $\cos^n x=\cos^{2k+1}x=(\cos^2 x)^k\cos x=(1-\sin^2 x)^k\cos x$

③ $m\,n$ 全偶 $\Rightarrow$ 利用降次公式 $\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\end{cases}$

(2) $\int \sec^m x\tan^n xdx$ 型

① n 爲偶數：

$\boxed{\text{Step 1}}$ 用 $\tan^n x=\tan^{2k}x=(\tan^2 x)^k=(\sec^2-1)^k$ 換全 $\sec^p x$

$\boxed{\text{Step 2}}$ 用 $\int \sec^{n+2}xdx=\dfrac{1}{n+1}\sec^n x\tan x+\dfrac{n}{1+n}\int \sec^n dx$

► $\int \sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c$; $\int \sec^2 xdx=\tan x+c$

② m 爲偶數

$\Rightarrow$ $\sec^m x=\sec^{2k+2}x=(\sec^2 x)^k\sec^2 x=(1+\tan^2 x)^k\sec^2 x$

③ $m\,n$ 全奇：

$\boxed{\text{Step 1}}$ $\sec^m x\tan^n x=\sec^{2k+1}x\tan^{2k'+1}x=\sec^{2k}x\tan^{2k'}x(\sec x\tan x)$

$\boxed{\text{Step 2}}$ $\tan^{2k'}x=(\tan^2 x)^{k'}=(\sec^2-1)^{k'}$

2.　倍角三角函數積分

遇 $\int \sin mx \cos nx dx$，$\int \sin mx \sin nx dx$ 或 $\int \cos mx \cos nx dx$

$\Rightarrow$ 利用三角函數的**積化和差**公式：

① $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

② $-2\sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

③ $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

例題 1. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin x \cos^4 x dx$

解

例題 2. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

解

例題 3. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

解

例題 4. (精選範例 1-2)

Calculate $\int \sin 5x \cos 3x dx$

解

例題 5. (精選範例 1-2)

Calculate $\int \sin x \cos 3x \cos 5x dx$

解

例題 6. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \tan^5 x \sec^4 x dx$

解

例題 7. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

解

例題 8. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \sec^3 x \tan^6 x dx$

解

重點二　特殊積分形式之其一：含絕對值的積分

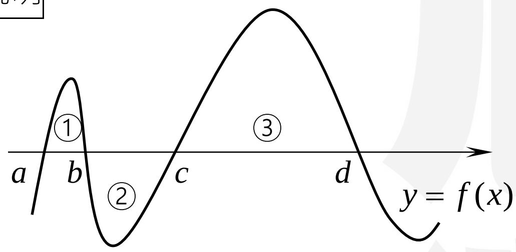
1.　把積分界限改寫成積分區域：$\int_a^b f(x)dx =$ ________

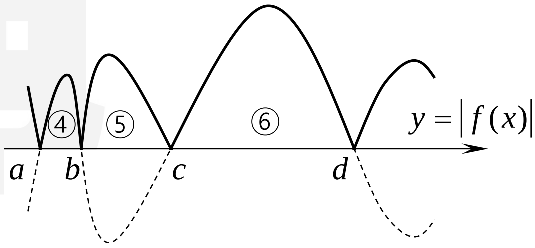
2.　遇 $\int_a^b |f(x)|dx \;\Rightarrow$ 分區計算

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

(其中 $I_+ = \{x : f(x) > 0\}$ 而 $I_- = \{x : f(x) < 0\}$)

說明





如圖，$\int_a^d |f(x)|dx =$

例題 1.

Calculate $\int_{-2}^{4}\left|x^2-2x-3\right|dx$

解

重點三　特殊積分形式之其二：含無窮的積分 (瑕積分)

1.　瑕積分兩種形式：

(1) $\int_a^b f(x)dx$ 其中 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$，$c\in[a,b]$

(2) $\int_a^b f(x)dx$ 其中 $a=-\infty$ 或 $b=\infty$

2.　求 $\int_a^b f(x)dx$ 時，若遇

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ____________

(2) $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ____________

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty$

$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ______________________________

(4) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ 其中 $c\in(a,b)$

$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ______________________

(5) $a=-\infty \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ____________

(6) $b=\infty \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ____________

(7) $a=-\infty$ 且 $b=\infty$

$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx=$ ______________________

説例

① $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　② $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{t^2}dt$

③ $\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx=\lim\limits_{t\to 2^-}\int_{-1}^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx+\lim\limits_{s\to 2^+}\int_s^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$

3. 注意事項：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$

(2) 若 $f(x)$ 爲**偶**函數，則 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx$

(3) 若 $f(x)$ 爲**奇**函數，必注意 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 不一定爲 0

說例

求 $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ 時，因 $\int_{-\infty}^{c} xdx = -\infty$ 但 $\int_{c}^{\infty} xdx = \infty$ 所以 $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ 無法計算

例題 1.

Calculate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

解

例題 2. (精選範例 3-1)

Calculate $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx$

解

例題 3. (精選範例 3-2)

Calculate $\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$

解

例題 4. (精選範例 3-3)

Calculate $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

解

重點四 微積分基本定理 II - 先積再微型

設 $f(t)$ 爲連續函數。

◎ $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt =$ ______________

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt =$ ______________

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt =$ ______________

(3) $\dfrac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt =$ ______________

説明

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h} \quad (\text{其中 } x \le c \le x+h, \text{ by 積分均值定理})$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \quad (\text{因 } x \le c \le x+h \text{ 且 } f(x) \text{ 爲連續}) \quad \text{Q.E.D.}$$

例題 1.

Evaluate $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Find the second derivative of $\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t dt$

解

例題 3. (精選範例 4-2)

Let $G(x) = \int_0^x \left\{ s\int_0^s f(t)dt \right\} ds$, where $f(t)$ is continuous for all real t. Find $G(0)$, $G'(0)$, $G''x)$, $G''(0)$ and $G'''(x)$

解

重點五 旋轉體積分

1. 針對一個中心軸旋轉出來的物體，其體積可以使用圓盤法和剝殼法來處理。

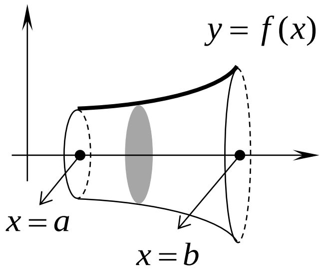
2. **圓盤法**：

型一 無中空型

(1) 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一個非負的連續函數，

若將 $y=f(x)$ 圖形以 x 軸為中心軸旋轉一圈

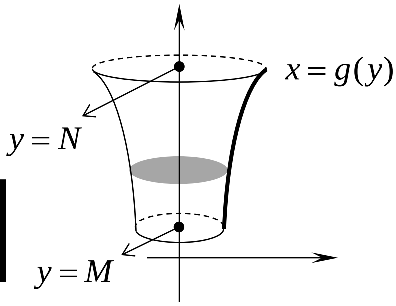
，則所得柱體體積 $V=$



(2) 設 $g(y)$ 在 $[M,N]$ 上是一個非負的連續函數，

若將 $x=g(y)$ 圖形以 y 軸為中心軸旋轉一圈

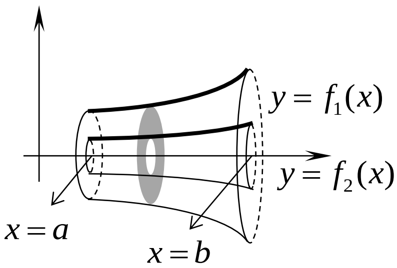
，則所得柱體體積 $V=$

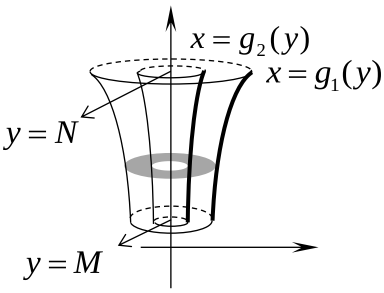


型二 有中空型

(1) 設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一個非負的連續函數，且 $f_1(x)\le f_2(x)$，若將 $y=f_1(x)$ 圖形為外，$y=f_2(x)$ 圖形為內，以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得旋轉體體積

$V=$





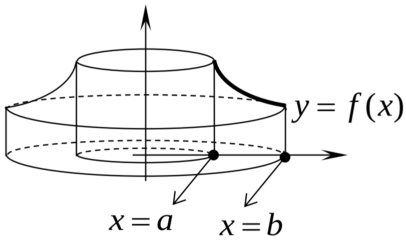
(2) 設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一個非負的連續函數，且 $f_1(x)\le f_2(x)$，若將 $y=f_1(x)$ 圖形為外，$y=f_2(x)$ 圖形為內，以 x 軸為中心軸旋

轉一圈，則所得旋轉體體積

$V =$

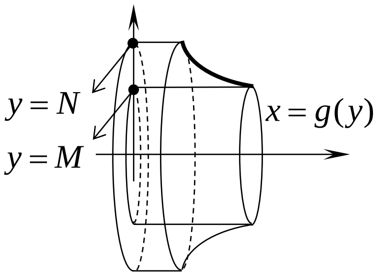
3. **剝殼法**：

(1) 設 $a \geq 0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $y=f(x)$ 圖形為上，$[a,b]$ 圖形



體積 $V =$

(2) 設 $M \geq 0$，$g(y)$ 在 $[M,N]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $x=g(y)$ 圖形為右，$[M,N]$ 圖形為左，以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得旋轉體體積 $V =$



例題 1. (精選範例 5-1)

A sphere of radius r can be obtained by revolving about the x-axis the region below the graph of $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\le x\le r$, then try to find the volume of sphere.

解

例題 2. (精選範例 5-2)

Find the volume of a pyramid of height h given that the base of the pyramid is a square with sides of length r and the apex of the pyramid lies directly above the center of the base.

解

例題 3. (精選範例 5-3)

Find the volume of the solid generated by revolving the region between $y = \ln x$ and $y = x$ about the y-axis, where $x \in [1, 2]$.

解